

**ABSORBIERENDE RANDBEDINGUNGEN FÜR
HYPERBOLISCHE PARTIELLE
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

Ludwig Wagatha

1982

ABHÄNGIGKEIT DER FUNKTIONEN
HYPERBOLISCHE GLIEDER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ABSORBIERENDE RANDBEDINGUNGEN FÜR HYPERBOLISCHE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Ludwig Wagatha
aus München

eingereicht am 31. März 1982



1. Berichterstatter : Prof. Dr. A. Sachs
2. Berichterstatter : Prof. Dr. E. Wienholtz

Tag der mündlichen Prüfung : 25. Juni 1982

INHALT

Einleitung

A :	Problemstellung	1
B :	Zusammenfassung	4

Teil I : Ausbreitung von Singularitäten

1)	Die Wellenfront einer Distribution	8
2)	Pseudodifferentialoperatoren	15
3)	Fourierintegraloperatoren	23

Teil II : Reflexion und Absorption von Singularitäten

4)	Reflexion von Singularitäten	28
5)	Absorption von Singularitäten	34

Teil III : Anwendungen der Theorie

6)	Allgemeine Überlegungen	46
7)	Approximationen absorbierender Randbedingungen, die durch Pseudodifferentialoperatoren gegeben sind	52
8)	Lösungsoperatoren für Differenzenapproximationen hyperbolischer Systeme	70

Teil IV : Numerische Simulation von Wellenausbreitungsvorgängen

9)	Literaturübersicht zur praktischen Anwendung absorbierender Randbedingungen	76
10)	Zur Implementierung der Verfahren aus den Kapiteln 7 und 8	79

Bezeichnungen

t, x, y	unabhängige Variable, insbesondere: t = Zeitvariable, x, y Raumvariable
τ, ξ, η	duale Variable zu t, x, y
T^*X	Kotangentialbündel, hier identisch mit $X \times \mathbb{R}^n$
$T^*X \setminus 0$	$= X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) =: X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt bzw. Anwendung eines linearen Funktionals
$ \cdot $	euklidische Norm
$\subset\subset$	kompakt enthalten
$D'(X)$	Raum der Distributionen
$E'(X)$	Distributionen mit kompaktem Träger
$H_0^S(X), H_{loc}^S(X)$	Sobolev-Räume
$WF(u)$	Wellenfront einer Distribution, cf. (1.2)
C^∞ bei (x_0, ξ_0)	(1.2)
D'_Γ	(1.5)
konisch	(1.3)
WF'	(1.9)
$A \circ B$	Verknüpfung zweier Abbildungen
$S^m(X)$	Symbole, cf. (2.1)
$L^m(X)$	Pseudodifferentialoperatoren, cf. (2.1)
$p \sim \Sigma p_j$	(2.5)
Hauptsymbol	(2.10)
$\ker(L)$	Nullraum eines Operators
$\gamma(I)$	charakteristische Punkte; (2.14)
L_2, L_∞	Funktionenräume mit den üblichen Normen
elliptisch	(2.12)
hyperbolisch	(2.15), (2.16)
Bicharakteristik	(2.18)
reflekt. B.C.	(4.3)
sachgemäßes ARWP	(5.1)
P_N	(7.9)
$u_t, u_y, \partial_t u, \phi_y$	partielle Ableitungen
D_j	$:= -i \partial_{x_j}$
t_A	adjungierte Abbildung
$\square$	Wellenoperator
Singularität	(1.4)

EINLEITUNG

A : Problemstellung

In den Naturwissenschaften tritt häufig die Situation auf, daß ein Vorgang, der durch ein System von hyperbolischen Differentialgleichungen beschrieben wird, in einem sehr großen, möglicherweise real unbeschränkten Gebiet G abläuft. Solche Vorgänge gibt es zum Beispiel im Bereich der Meteorologie (Elvius-Sundström (1973)), der Geologie (Clayton -Engquist (1977), Reynolds (1978)) und der Strömungsmechanik (Chu-Sereny (1974), Bayliss-Turkel (1980)).

Bei der numerischen Simulation derartiger Prozesse kann die Lösung aufgrund beschränkter Speicherplatz- und Rechenzeitkapazitäten nur in einem endlichen Teilgebiet TG approximiert werden, d.h. es werden künstliche Ränder eingeführt (vgl. die obige Literatur; das Gebiet in ein endliches Gebiet zu transformieren beseitigt die Schwierigkeiten bei hyperbolischen Gleichungen nicht, wie Grosch und Orszag (1977) zeigen).

Um ein sachgemäßes Problem zu erhalten, sind an diesen Rändern Randbedingungen vorzuschreiben.

Die entscheidende Frage in diesem Zusammenhang ist nun:

Unter welchen Voraussetzungen an die Randbedingungen approximiert die Lösung des Problems im Teilgebiet dort die Lösung des ursprünglichen Problems?

Aus der physikalischen Anschauung gewinnt man eine Forderung an die Randbedingungen: Diese dürfen aus dem Inneren von TG auf den künstlichen Rand auftreffende Wellen nicht in das Innere des Teilgebietes reflektieren.

Gustafsson und Kreiss (1979) haben gezeigt, daß diese Bedingung, was ebenfalls anschaulich klar ist, nur hinreichend sein kann, wenn der Einfluß der Koeffizienten der Gleichung und der Inhomogenitäten in $G \setminus TG$ auf die Lösung in TG gering ist.

Wir nehmen im folgenden an, daß dieses Prinzip der Nicht-reflexion für das Problem im Teilgebiet eine sinnvolle Forderung ist und beschäftigen uns unter dieser Annahme mit folgendem Modellproblem:

Gegeben sei eine lineare strikt hyperbolische Gleichung

$$(0.1) \quad u_t = A(x,y)u_y + \sum_{i=1}^n B_i(x,y)u_{x_i},$$

mit Koeffizientenmatrizen $A(x,y), B_i(x,y) \in \mathbb{R}^{m,m}$ in

$$(0.2) \quad \{(t,x,y) / t \geq 0, y \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

mit Anfangsbedingung

$$(0.3) \quad u(0,x,y) = f(x,y) \in \mathbb{R}^m$$

Es sind insbesondere zwei Fragen zu untersuchen:

- (0.4a) Welche Randbedingungen müssen am Rand $y=0$ des Gebietes $\{(t,x,y) / y \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ vorgeschrieben werden, damit Absorption (in einem zu konkretisierenden Sinne) auftritt?

(0.4b) Wie können diese Randbedingungen ¹⁾, die u.U. durch Operatoren gegeben sind, deren direkte Diskretisierung nicht sinnvoll ist (vgl. z.B. Engquist-Majda (1977) und Teil 2) in einer konkreten numerischen Rechnung verwendet werden ?

Die Frage (0.4a) wird mit Hilfe der Theorie der Ausbreitung von Singularitäten bei hyperbolischen Gleichungen untersucht; dieses systematische Vorgehen soll das Verhältnis der verschiedenen verwendeten Verfahren klären.

Eine mögliche Antwort auf die Frage (0.4b) wurde von B. Engquist und A. Majda (1977) (1979) gegeben: Sie schlagen Taylor- bzw. Padé-Entwicklung des Symbols des Pseudodifferentialoperators, der die Randbedingung beschreibt, vor und zeigen, daß dies (bei der Wellengleichung) auf eine Hierarchie sachgemäßer Anfangs/Randwertprobleme im Sinne von Kreiss (1970) führt.

Diese Antwort ist aus einigen Gründen unbefriedigend: Wellen, deren Einfallswinkel nicht sehr nahe bei 90° liegt, werden schlecht absorbiert, die Berechnung der Randbedingungen ist insbesondere bei Systemen hyperbolischer Gleichungen aufwendig.

Eine Verbesserung der Verfahren in diesen Punkten ist wünschenswert, ebenso eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Trautenberg (1980).

1) Es wird im folgenden oft die Abkürzung RB für Randbedingung und ARWP für Anfangs/Randwertproblem verwendet werden.

Bei der Beantwortung der Frage (0.4b) ist darüber hinaus nicht nur wichtig, daß theoretisch geeignete Randbedingungen und Diskretisierungen angegeben werden, es ist auch ihre numerische Brauchbarkeit anhand von Beispielen zu überprüfen und die Ergebnisse sowie der Aufwand sind mit anderen Verfahren zu vergleichen.

B : Zusammenfassung

Eine mathematische Beschreibung von Ausbreitungs- und Reflexionsvorgängen bei hyperbolischen Gleichungen ist im Rahmen der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren, Fourierintegraloperatoren und Wellenfronten möglich, die in den letzten fünfzehn Jahren entwickelt wurde (vgl. Nirenberg (1973)). Diese Theorie gestattet eine genaue Beschreibung der Stellen der Nichtdifferenzierbarkeit von Lösungen partieller Differentialgleichungen.

Der erste Teil der Arbeit enthält eine Zusammenstellung von Begriffsbildungen dieser Theorie und von Ergebnissen, die für das Verständnis der folgenden Kapitel wesentlich sind. Die Darstellung ist sehr knapp gehalten, sie lehnt sich an Duistermaat (1973), Taylor (1974) und Treves (1980b) an.

In Kapitel 1 definieren wir den Begriff der Wellenfront einer Distribution, den Hörmander (1971b) zur näheren Charakterisierung des singulären Trägers $\text{sing supp}(u)$

einer Distribution u einführte.

Kapitel 2 gibt einen kurzen Abriß der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren und der Ergebnisse über die Ausbreitung von Wellenfronten bei hyperbolischen Gleichungen.

Kapitel 3 behandelt spezielle Lösungsoperatoren bei hyperbolischen Gleichungen, sogenannte Fourierintegraloperatoren (FIO). Dabei beschränken wir uns auf eine Beschreibung der Ergebnisse der lokalen Theorie, die für diese Arbeit eine wesentliche Rolle spielt.

Im zweiten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns mit der Absorption von Singularitäten (genauer: Wellenfronten) am Rande des Gebietes. Lax und Nirenberg (Nirenberg (1973)), Majda und Osher (1975) und Taylor (1975) untersuchten, unter welchen Voraussetzungen Singularitäten dort reflektiert werden. Aufbauend darauf entwickeln wir notwendige Bedingungen, die jede absorbierende Randbedingung erfüllen muß; bisher wurden notwendige Bedingungen für absorbierende Randbedingungen in der Literatur noch nicht angegeben. Wir zeigen, daß die Bedingung von B. Engquist und A. Majda (1977) einem der beiden möglichen Fälle unterzuordnen ist. Durch Anwendung der anderen möglichen Bedingung konstruieren wir eine neuartige absorbierende Randbedingung.

Der dritte Teil behandelt die Anwendung dieser Resultate. In Kapitel 6 finden sich allgemeine Überlegungen zu dieser Problematik und es wird ein Beispiel angegeben, das die formalen Ergebnisse des zweiten Teils anschaulich macht. Da die Randbedingungen, die in Teil II entwickelt wurden, über einen Pseudodifferentialoperator bzw. einen Fourier-

integraloperator (Lösungsoperator) gegeben waren, wird in Kapitel 7 die Frage untersucht, wie man diese Randoperatoren approximieren kann. Es wird eine neue Klasse von Approximationen an das Symbol des Pseudodifferentialoperators eingeführt und gezeigt, daß sie auf sachgemäße Anfangs/Randwertprobleme im Sinne von Kreiss (1970) führt und daß diese Randbedingungen bessere Absorptionseigenschaften besitzen als jene von Engquist-Majda (1977) (1979).

In Kapitel 8 wird das Verfahren von Trautenberg (1980a), das man nach Kapitel 5 als Vorgabe der Lösung am Rand mit Hilfe eines diskreten Lösungsoperators interpretieren kann, so verallgemeinert, daß es für explizite Differenzenschemata bei hyperbolischen Systemen verwendbar ist.

Im vierten Teil, der numerische Fragen behandelt, geben wir zunächst einen Überblick über die Literatur zu diesem Thema (Kapitel 9).

Es folgen eine Darstellung der numerischen Resultate, die man mit einer Implementierung der in den Kapiteln 7 und 8 entwickelten Verfahren erhält und Vergleiche der Absorptionseigenschaften der Randbedingungen. Während die Methode aus Kapitel 8 (Lösungsoperatoren) aufgrund des Rechenzeitbedarfs nur bedingt brauchbar ist, werden die bewiesenen guten Absorptionseigenschaften der Randbedingungen nach Kapitel 7 auch numerisch bestätigt.

Es werden auch algorithmische Verbesserungen bei der Behandlung von Ecken des Gebietes und der Berechnung von Approximationen vorgeschlagen, deren Wirksamkeit von Testrechnungen bestätigt wird.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn

Prof. Dr. A. Sachs für die Anregung und die stete

Unterstützung dieser Arbeit bedanken.

Besonderer Dank für ihr Interesse und ihre anregende,

konstruktive Kritik gebührt auch meinen Freunden

Dipl.-Math. Jorgo Akrivis, Dipl.-Math. Karlheinz Hafner

und Dipl.-Math. Gustav Löbel.

TEIL I : AUSBREITUNG VON SINGULARITÄTEN

In den folgenden drei Kapiteln wird zuerst der Begriff der Wellenfront (wave front set) einer Distribution - von Hörmander (1971a) zur genaueren Beschreibung des singulären Trägers eingeführt - erklärt.

Dann folgt ein kurzer Abriß der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren und der Fourierintegraloperatoren, mit deren Hilfe Aussagen über die Ausbreitung von Singularitäten (genauer: Wellenfronten) bei Lösungen von partiellen Differentialgleichungen möglich sind. Die Verwendung einer durch einen Pseudodifferentialoperator gegebenen Transformation ermöglicht eine Separation der Bicharakteristiken in der Nähe einer Randkurve und damit die Untersuchung der Reflexion von Singularitäten am Rand (Nirenberg (1973), Taylor (1975)).

Die Darstellung lehnt sich an Duistermaat (1973), Taylor (1975), Sjöstrand(1980) und Treves (1980a)(1980b) an, sie ist bewußt knapp gehalten.

1. Die Wellenfront einer Distribution

Motivation

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Wellenfront WF einer Distribution (wave front set) eingeführt, der sich

für die Untersuchung der Ausbreitung und damit auch der Reflexion der Singularitäten der Lösung von partiellen Differentialgleichungen als außerordentlich wichtig erwiesen hat.

Beschäftigt man sich mit dem Problem, zwei Distributionen zu verknüpfen, so ergibt sich, daß dies nur möglich ist, wenn ihre Wellenfronten bestimmten Bedingungen genügen. Der Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen ergibt sich daraus, daß jede Distribution E über $X \times Y$ durch

$$\langle \langle E(x, y), \varphi(y) \rangle, \psi(x) \rangle = \langle E(x, y), \varphi(y) \psi(x) \rangle \quad 1)$$

eine lineare Abbildung $C_0^\infty(Y) \rightarrow D'(X)$ induziert.

E kann nun z.B. als Lösungsoperator einer Gleichung interpretiert werden, der Anfangsdaten u auf die Lösung Eu abbildet und der unter Bedingungen an $WF(u)$, $WF(u) \subset \Gamma$, zu einem Operator

$$E : D'_\Gamma(Y) \rightarrow D'(X) \quad , \quad D'_\Gamma(Y) \subset D'(Y) \quad 2)$$

erweitert werden kann.

Der Begriff der Wellenfront wurde zuerst von Hörmander (1971a) im Zusammenhang mit Fourierintegraloperatoren eingeführt. Verschiedene äquivalente Definitionen finden sich z.B. in Duistermaat (1973), Gabor (1972), Nirenberg (1973), Taylor (1974).

1) φ, ψ Testfunktionen

2) $\Gamma, D'_\Gamma(Y)$ geeignet, vgl. (1.5).

Definition und Eigenschaften von $WF(u)$

Wir gehen aus vom Begriff des singulären Trägers einer Distribution, also der Menge der Punkte, in denen $u \in D'(X)$ nicht C^∞ ist; dabei sei im folgenden X immer eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Eine Übertragung der Theorie auf parakompakte C^∞ -Mannigfaltigkeiten X endlicher Dimension ist möglich; da jedoch diese Allgemeinheit später nicht benötigt wird, verzichten wir von vornherein darauf. In der Notation wird dennoch gelegentlich $T^*X \setminus 0$ statt $X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ verwendet, da das Kotangentialbündel T^*X die wesentliche zugrundeliegende Struktur ist.

(1.1) Definition: Es sei $u \in D'(X)$, $x \in X$. $x \notin \text{sing supp}(u) \iff \exists \phi \in C_0^\infty(X), \phi(x) \neq 0 : \phi u \in C^\infty(X)$.

Nach dem Satz von Paley-Wiener (Hörmander (1976,p.21)) sind dies genau Funktionen ϕu , für die gilt:

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N (1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N};$$

dabei bezeichnet $\widehat{}$ die Fourier-Transformation.

Lokalisiert man auch im Frequenzraum, so erhält man:

(1.2) Definition (Duistermaat (1973)) : Sei $u \in D'(X)$.

Dann ist $WF(u)$ definiert als das Komplement in $X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ aller $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, für die es Umgebungen U von x_0 , V von ξ_0 gibt, so daß $\forall \phi \in C_0^\infty(U), \forall N \in \mathbb{N}$:

$$|\widehat{\phi u}(\tau \xi)| = O(\tau^{-N}) \quad \text{für } \tau \rightarrow \infty, \text{ glm. in } \xi \in V.$$

Ist $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, so heißt $u \in C^\infty$ bei (x_0, ξ_0) .

Es gilt (Duistermaat (1973)):

- (1.3) Satz: i) $WF(u)$ ist eine abgeschlossene konische Teilmenge¹⁾ von $X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$
- ii) $\text{sing supp } (u) = \pi(WF(u))$. Dabei ist $\pi : X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \rightarrow X$ die natürliche Projektion
- iii) $WF(u)|_Y = WF(u) \cap \pi^{-1}(Y) \quad \forall \quad Y \subset X \text{ offen.}$

Bemerkung: ii) besagt anschaulich, daß der Begriff $WF(u)$ jeden Punkt im singulären Träger von $u \in D'(X)$ mit einem oder mehreren Richtungsvektoren versieht, d.h. es gilt mit i):

(1.4) Korollar: $WF(u)$ ist eine abgeschlossene konische Teilmenge des Kotangentialbündels von X ohne die Nullsektion $T^*X \setminus 0$.

Zur Veranschaulichung des Begriffs eignet sich gut eine Eigenschaft, die Taylor (1974) angibt: Es sei $Z \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand ∂Z , $u = \chi_Z$ die charakteristische Funktion. Dann ist

$$WF(u) = \{(x, \xi) \mid x \in \partial Z \text{ und } 0 \neq \xi \text{ senkrecht zu } \partial Z\}.$$

Noch eine Bemerkung zum Sprachgebrauch:

Wir bezeichnen $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$ (gelegentlich auch $x = \pi(x, \xi)$) als Singularität von u , wenn $(x, \xi) \in WF(u)$ gilt.

1) Eine Teilmenge Γ von $T^*X \setminus 0$ heißt konisch $\Leftrightarrow$

$$(x, \xi) \in \Gamma \Rightarrow \forall \tau > 0 : (x, \tau \xi) \in \Gamma$$

Im folgenden zitieren wir kurz die wesentlichen Ergebnisse über Multiplikation und Komposition von Distributionen in der Darstellung von Gabor (1972) :

(1.5) Definition: Γ sei eine abgeschlossene konische Teilmenge von $T^*X \setminus 0$. $D'_\Gamma(X) := \{A \in D'(X) / WF(A) \subset \Gamma\}$ ¹⁾.

Eine Folge A_j in $D'_\Gamma(X)$ konvergiert gegen $A \in D'_\Gamma(X) : \infty$

- i) $A_j \rightarrow A$ in $D'(X)$ schwach
- ii) $|\xi|^m |\widehat{A_j}(\xi) - \widehat{A}(\xi)| \rightarrow 0$ für $|\xi| \rightarrow \infty$
 glm. in ξ für ξ aus jeder abgeschlossenen
 konischen Teilmenge Γ_1 , $\Gamma_1 \cap \Gamma = \emptyset$.

(1.6) Satz: $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ seien offen, $\phi : Y \rightarrow X$ eine C^∞ -Abbildung. ${}^t\phi_Y$ sei die adjungierte Abbildung zur linearisierten Abbildung ϕ_Y .

$$N_\phi := \{(\phi(Y), \xi) / {}^t\phi_Y(y)\xi = 0\}$$

Ist $A \in D'(X)$ und $WF(A) \cap N_\phi = \emptyset$, so gibt es genau eine Rückholung (pullback) ϕ^*A mit :

$$\phi^*A = A \circ \phi \quad \text{für glattes } A.$$

Die Abbildung ϕ^* ist folgenstetig $D'_\Gamma(X) \rightarrow D'(\Gamma)$

für jedes konische, abgeschlossene $\Gamma \subset T^*X \setminus 0$ mit $\Gamma \cap N_\phi = \emptyset$.

Weiterhin gilt:

$$WF(\phi^*A) \subset \phi^*(WF(A)) = \{(y, {}^t\phi_Y(\xi)) / (\phi(y), \xi) \in WF(A)\}$$

1) Wir verwenden für Distributionen bevorzugt Kleinbuchstaben, wenn wir den "Funktionscharakter" oder "Lösungscharakter" vor Augen haben, Großbuchstaben, wenn sie "Lösungsoperatoren" darstellen; vgl. die Einleitung zu Kapitel 1.

(1.7) Bemerkung: Dieser Satz umfaßt als Spezialfall die Restriktion einer Distribution auf eine Hyperfläche H : $u|_H$ ist wohldefiniert, wenn $WF(u) \cap H^\perp = \emptyset$, wobei $H^\perp \subset T^*X$ das Normalenbündel bezeichnet (vgl. Hörmander (1971a, Thm. 2.5.11.)). Dieses Ergebnis benötigen wir in Kapitel 5.

Mit Hilfe dieses Restriktionssatzes und Ergebnissen über die Wellenfront von Tensorprodukten von Distributionen beweist man:

(1.8) Satz: $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset T^*X \setminus 0$ seien abgeschlossene, konische Teilmengen mit:

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2) \cap (X \times \{0\}) = \emptyset, \text{ wobei}$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 := \{(x, \xi_1 + \xi_2) \mid (x, \xi_i) \in \Gamma_i, i=1,2\}.$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$D'_{\Gamma_1}(X) \times D'_{\Gamma_2}(X) \rightarrow D'(X),$$

die das Produkt $C^\infty(X) \times C^\infty(X) \ni (u_1, u_2) \mapsto u_1 u_2 \in C^\infty(X)$

fortsetzt und für $A_1 \in D'_{\Gamma_1}(X)$, $A_2 \in D'_{\Gamma_2}(X)$ gilt:

$$WF(A_1 A_2) \subset (\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Diese Verallgemeinerung der Multiplikation von Funktionen und die Einbettung von $u \in D'(X)$ in $D'(X \times Y)$ mittels des Tensorproduktes $u \otimes 1$ führt auf ein Resultat über die Komposition von Distributionen und die sich dabei ergebenden Singularitäten $WF(Eu)$. Für uns ist von Interesse die Interpretation als Anwendung eines Lösungsoperators $E \in D'(X \times Y)$ auf eine auf der Hyperfläche $Y \subset X$ gegebene Anfangsfunktion $u \in D'(Y)$:

(1.9) Satz: Es sei $E \in D'(X \times Y)$; $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ seien offen.

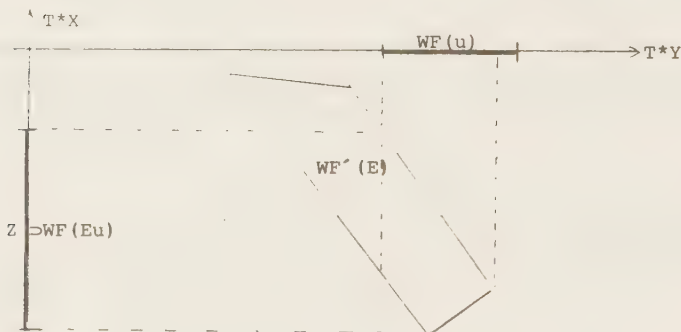
$$WF'(E) := \{(x, \xi, y, -\eta) \mid (x, y, \xi, \eta) \in WF(E)\}$$

$$WF'_X(E) := \{(x, \xi) \mid (x, y, \xi, 0) \in WF(E)\}$$

$$WF'_Y(E) := \{(y, \eta) \mid (x, y, 0, -\eta) \in WF(E)\}$$

Ist $WF'_X(E) = \emptyset$, $u \in D'(Y)$ und $WF(u) \cap WF'_Y(E) = \emptyset$,
dann ist $WF(Eu) \subset WF'(E)WF(u)$ ¹⁾ für $Eu \in D'(X)$ definiert
durch $\langle Eu, \phi \rangle := \langle E(1 \otimes u), \phi \otimes 1 \rangle$, $\forall \phi \in C_0^\infty(X)$.

Zur Veranschaulichung: Die Wellenfront von Eu ist höchstens
in Z enthalten; Z ist über $WF'(E)$ und $WF(u)$ bekannt.



Die Achsen stellen formal $T^*X \subset \mathbb{R}^{2n}$, $T^*Y \subset \mathbb{R}^{2m}$ graphisch
eindimensional dar.

In den nächsten Abschnitten werden wir neuere Ergebnisse über
die Lösungsoperatoren von partiellen Differentialgleichungen
und ihre Wellenfronten angeben.

1) $WF'(E)WF(u) = \{(x, \xi) \mid \exists (y, \eta) : (x, \xi, y, \eta) \in WF'(E) \wedge (y, \eta) \in WF(u)\}$

2. Pseudodifferentialoperatoren

Motivation und Definitionen

Der Ausgangspunkt der Entwicklung der Pseudodifferentialoperatoren (PSDO) war der Versuch, die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten mit Hilfe eines Integraloperators, einer Verallgemeinerung der Fourier-Rücktransformation, darzustellen (Calderon-Zygmund (1957),(1958)). In der Zwischenzeit wurde diese Theorie ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Lösung. In unserem Kontext sind von besonderer Bedeutung die Ergebnisse über Ausbreitung und Reflexion von Singularitäten (Nirenberg (1973), Taylor (1974), Taylor (1975), Majda-Osher (1975)), sowie zwei Sätze über die Faktorisierbarkeit von Differentialoperatoren, die auf Projektionsoperatoren und Randbedingungen führen (Nirenberg (1973), Taylor (1975)).

Vor den teilweise etwas technischen Definitionen erinnern wir kurz an einige Eigenschaften der Fourier-Transformation:

Die Fourier-Transformation ist ein Isomorphismus auf dem Raum S der Schwartz-Funktionen über dem $\mathbb{R}^n$. Sie ist definiert durch:

$$(Fu)(\xi) := \widehat{u}(\xi) := \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx ,$$

$u \in S$, ihre Umkehrung ist gegeben durch

$$(F^{-1}v)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} v(\xi) d\xi .$$

Insgesondere erhalten wir für $u \in S$:

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{u}(\xi) d\xi .$$

Differentiation liefert ($D := -i\frac{\partial}{\partial x}$) :

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n} \int \xi^\alpha e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{u}(\xi) d\xi$$

Allgemeiner mit einem Differentialpolynom $p = \sum p_\alpha(x) D^\alpha$:

$$\begin{aligned} p(x, D) u(x) &= (2\pi)^{-n} \int p(x, \xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{u}(\xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n} \iint p(x, \xi) e^{i\langle x-y, \xi \rangle} u(y) dy d\xi \end{aligned}$$

Eine naheliegende Verallgemeinerung ist nun, daß man statt eines Polynoms $P(x, \xi)$ bestimmte "Symbole", d.h. Funktionen mit gewissen Eigenschaften, zuläßt, was auf Pseudodifferentialoperatoren führt.

Ersetzt man zusätzlich noch das Skalarprodukt $\langle x-y, \xi \rangle$ durch sogenannte "Phasenfunktionen", so erhält man Fourierintegraloperatoren, die als Lösungsoperatoren für hyperbolische Gleichungen Bedeutung erlangt haben.

Wir beginnen mit der Definition von Symbolen:

(2.1) Definition (Taylor (1974)):

$X \subset \mathbb{R}^n$ sei offen; $m \in \mathbb{R}$.

$S^m(X)$ ist die Menge der $p \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß für alle Kompakta $K \subset X$ und für alle Multiindizes α, β eine Konstante C existiert, so daß

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}$$

für $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Die Elemente von $S^m(X)$ heißen Symbole der Ordnung m .

Mit $p \in S^m(X)$ heißt der Operator $P(x, D)$, der durch

$$P(x, D) u(x) := (2\pi)^{-n} \int p(x, \xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{u}(\xi) d\xi$$

auf $C_0^\infty(X)$ definiert ist, ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung m , wir schreiben $P(x, D) \in L^m(X)$.

(2.2) Bemerkung : i) Dies ist eine recht spezielle Definition, die aber für unsere Zwecke genügt. Für die Definition von Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten oder als Spezialfälle von Fourierintegraloperatoren siehe z.B. Duistermaat (1973).

ii) Beispiele: a) Jeder partielle Differentialoperator der Ordnung m liegt in $L^m(X)$.

b) Die Parametrix eines elliptischen Operators der Ordnung m liegt in $L^{-m}(X)$, vgl. (2.12) .

Im nächsten Abschnitt stellen wir wichtige Eigenschaften dieser Operatoren kurz zusammen.

Eigenschaften

Im folgenden sei $P(x,D)$ ein Operator aus $L^m(X)$.

(2.3) $P(x,D)$ ist stetig: $C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$. Es gibt eine stetige Erweiterung $E'(X) \rightarrow D'(X)$ (bezgl. der üblichen Topologie auf diesen Räumen) .

(2.4) Ist $u \in E'(X)$, so gilt: $\text{sing supp}(P(x,D)u) \subset \text{sing supp}(u)$ (Pseudolokale Eigenschaft) .

Bei der rekursiven Lösung von Gleichungen mit Termen abnehmender Ordnung ergibt sich häufig eine Folge von Symbolen p_j abnehmender Ordnung. Dann gibt es einen PSDO, dessen Symbol als Reihe der p_j aufgefaßt werden kann:

(2.5) $p_j \in S^{m_j}(X)$, $m_j \searrow -\infty$, $j \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \exists p \in S^{m_0}(X)$, so daß
 $\forall k \in \mathbb{N} : p - \sum_{j \geq m_k} p_j \in S^{m_k}(X)$. Wir schreiben $p \sim \sum p_j$.

(2.6) Definition : $T \subset X \times X$ heißt Teilmenge mit sachgemäßem Träger (proper subset) : $\Leftrightarrow \forall K \subset\subset X : \{ (x,y) \in T / x \in K \vee y \in K \}$ ist kompakt. Eine Distribution $A \in \mathcal{D}'(X \times X)$ heißt sachgemäß getragen (properly supported), falls $\text{supp}(A) \subset X \times X$ sachgemäßen Träger hat.

(2.7) Ist $P(x,D) \in L^m(X)$ sachgemäß getragen, dann ist
 $Q(x,D) := {}^t P(x,D) \in L^m(X)$ und
 $q(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (iD_\xi)^\alpha D_x^\alpha {}^t p(x, -\xi). \quad (\text{Multiindices } \alpha)$

(2.8) Seien $P \in L^m(X), Q \in L^{m'}(X)$ sachgemäß getragen $\Rightarrow$
 $QP \in L^{m+m'}(X)$ und hat als Symbol
 ${}^t_{QP}(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (iD_\xi)^\alpha q(x,\xi) D_x^\alpha p(x,\xi) .$

Im folgenden bezeichne L^m nur noch die Menge der sachgemäß getragenen Pseudodifferentialoperatoren.

(2.9) $\phi: X \rightarrow Y$ diffeomorph, $P \in L^m(X)$
 $Qu := P(u \circ \phi) \circ \phi^{-1}, Q: C_0^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(Y) \Rightarrow$
 ${}^t_Q(\phi(x), \xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (D_Y^\alpha \exp(i \langle \phi(Y) - \phi(x) - \phi'_x(x)(Y-x), \xi \rangle \Big|_{x=Y}) \times$
 $\times D_\xi^\alpha p(x, {}^t_{\phi'_x(x)} \xi))$
 und $Q \in L^m(Y).$

(2.10) Bemerkung: Der führende Term, auch Hauptsymbol (principal symbol) genannt, ist also $p(x, {}^t_{\phi'_x(x)} \xi)$.
 Man kann Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten definieren, das Hauptsymbol ist dann wohldefiniert auf dem Kotangentenbündel $T^*(X)$.

$$(2.11) \quad P \in L^m(X) \Rightarrow P : H^S_o(X) \rightarrow H^{S-m}_{loc}(X).$$

(2.12) Definition: $P(x,D) \in L^m(X)$ heißt elliptisch der Ordnung $m : \Leftrightarrow \forall K \subset X$ kompakt $\exists C, R :$

$$|p(x, \xi)| \geq C (1 + |\xi|)^m \quad \text{falls} \quad |\xi| \geq R, x \in K.$$

Ist $P(x,D) \in L^m(X)$ elliptisch $\Leftrightarrow \exists Q \in L^{-m}(X) :$

Q ist Parametrix für P ; d.h.

$$QP = I \bmod L^{-\infty}(X), \quad PQ = I \bmod L^{-\infty}(X), \quad L^{-\infty}(X) := \bigcap_m L^m(X).$$

Beweise und Erläuterungen dieser Aussagen findet man z.B. in Nirenberg (1973), Taylor (1974), Kohn-Nirenberg (1965).

Wir wollen nun noch den Zusammenhang mit dem Kapitel über Wellenfronten herstellen. Wie oben bereits erwähnt, kann ein Pseudodifferentialoperator P als Distribution $P \in \mathcal{D}'(X \times X)$ aufgefaßt werden. Dann gilt (Duistermaat (1973; Kap. 2.4)):

$$(2.13) \quad WF'(P) \subset \text{diag}(T^*X \setminus 0) = \{(x, \xi, x, \xi) / (x, \xi) \in T^*X \setminus 0\}.$$

Dazu ein Beispiel: Gegeben sei $Pu = f$ als Pseudodifferentialgleichung. Nach (2.12) ist bekannt, daß $u = Qf$ und $Q \in L^{-m}(X)$, falls $P \in L^m(X)$ und P elliptisch.

Die Singularitäten der Lösung liegen, da $WF(u) \subset WF'(Q)WF(f)$ (cf. (1.9)), dort, wo f Singularitäten hat.

(2.14) (Taylor (1974)): $\gamma(P)$ sei die Menge der charakteristischen Punkte von $P \in L^m(X)$ ¹⁾. Dann gilt:

$$WF(u) = \bigcap_{\substack{P \in L^0_o(X) \\ Pu \in C^\infty_o(X)}} \gamma(P) \subset T^*X \setminus 0$$

1) $(x_o, \xi_o) \notin \gamma(P) \Leftrightarrow |p(x, \xi)| \geq C|\xi|^m$ für $|\xi| \geq 1$ in einer konischen Umgebung von (x_o, ξ_o) in $T^*X \setminus 0$.

Hyperbolische Gleichungen und Ausbreitung von Singularitäten

Wir wenden uns nun einer Klasse von Operatoren zu, die charakteristische Punkte besitzen und geben ein wesentliches Ergebnis von Hörmander über die Ausbreitung von Singularitäten an, das die klassischen Ergebnisse verallgemeinert. Wir betrachten nun auch Matrizen von Pseudodifferentialoperatoren, vgl. Taylor (1974).

(2.15) Definition: K_0, K_1 seien Matrizen von Pseudodifferentialoperatoren, $K_0 \in L^0$ und K_1 habe ein Symbol $\sigma_{K_1}(x, \xi)$, das in $|\xi| \geq 1$ homogen in ξ vom Grad 1 ist. Die Eigenwerte von $\sigma_{K_1}(x, \xi)$ seien für festes (x, ξ) , $|\xi| \geq 1$, rein imaginär und paarweise verschieden. Dann heißt der Operator $\frac{\partial}{\partial t} - (K_1 + K_0)$ strikt hyperbolisch.

(2.16) Definition: L sei ein skalarer (Pseudo-)Differentialoperator der Ordnung m ; L heißt strikt hyperbolisch in Bezug auf die Flächen $t = \text{const}$: $\Leftrightarrow$

Für jedes feste (t, x, ξ) , $\xi \neq 0$, sind die Wurzeln $\tau_1, \dots, \tau_m$ von $L_m(t, x, \tau_i, \xi) = 0$ des Hauptteils L_m von L reell und paarweise verschieden.

(2.17) Bemerkung: Taylor (1974) gibt eine allgemeine Methode an, einen Operator m -ter Ordnung mit Hilfe des Operators $(1 + \Delta)^{1/2}$ in ein System erster Ordnung umzuwandeln. Mit dieser in (5.7) dargestellten Methode sieht man die Äquivalenz der Definitionen. Mit Hilfe von Energieabschätzungen kann nun die Lösbarkeit von strikt hyperbolischen (Pseudo-)Differentialgleichungen bewiesen werden. Dieses Verfahren gibt jedoch nicht genügend Aussagen über die Struktur der Lösung.

Lax (1957) konstruierte Näherungslösungen, mit deren Hilfe man Aussagen über die Ausbreitung von Singularitäten gewinnen kann. In diesem Zusammenhang ist der Begriff der Bicharakteristiken eines Operators von besonderer Bedeutung:

(2.18) Definition: $P(x,D)$ sei ein Operator in $L^m(X)$ mit reellem Hauptsymbol $p(x,\xi)$. Eine Integralkurve des Vektorfeldes

$$H_p : = \sum \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \partial_{x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \partial_{\xi_i} \quad \text{in } T^*X$$

heißt bicharakteristischer Streifen. Ist entlang eines bicharakt. Streifens $p=0$, so heißt dieser Null-Bicharakteristik.

(2.19) Bemerkung: i) Da wir den Fall $X \subset \mathbb{R}^n$ betrachten, lösen die bicharakteristischen Streifen also die Hamiltongleichungen $\dot{x} = p_\xi$, $\dot{\xi} = -p_x$.

ii) Ist $p = 0$ an einem Punkt der Bicharakteristik, dann gilt dies für alle Punkte dieser Bicharakteristik, da $H_p p = 0$.

iii) Beispiel: $P(x,D) = P(t,y,\partial_t,\partial_y) = \partial_t^2 - \partial_y^2$.

Dann sind die Null-B.C. Lösungen von :

$$t = 0, \quad y = 0, \quad \dot{t} = 2\tau, \quad \dot{y} = \pm 2\tau.$$



Es gilt nun:

(2.20) Satz (Hörmander (1970)): Es sei $P(x,D)$ ein partieller Differentialoperator mit reellem Hauptsymbol $p(x,\xi)$, u sei eine Lösung von $Pu = f$, $f \in C^\infty(X)$. $\gamma(t) \subset T^*X$ sei eine Null-Bicharakteristik mit $t \in [0,1] =: I$. Ist $\gamma(t_1) \subset WF(u)$ und $\frac{\partial}{\partial t} p \neq 0$ entlang $\gamma(I) \Rightarrow \gamma(I) \subset WF(u)$; d.h. Singularitäten breiten sich entlang der Bicharakteristiken aus.

(2.21) Bemerkung: Hörmander (1971b) bewies auch ein schärferes Ergebnis: $f \in H^S$ auf $\gamma(I)$, $u \in H^{S+m-1}$ bei $\gamma(t_1) \Rightarrow u \in H^{S+m-1}$ auf $\gamma(I)$.

Im Rahmen dieser Arbeit genügen jedoch die dualen Begriffe $u \in C^\infty$ bei (x_0, ξ_0) und $(x_0, \xi_0) \in WF(u)$, wir verzichten deshalb auf eine Darstellung der H^S -Theorie, die analog zur Definition (1.2) über die maximale Ordnung N des Abklingens der Fourier-Transformierten eingeführt werden kann.

3. Fourierintegraloperatoren

Einführung

Löst man ein Anfangswertproblem für die Wellengleichung der Form

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

$$u(t, x) \Big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t(t, x) \Big|_{t=0} = 0$$

durch Fouriertransformation bezüglich der Raumvariablen $x \in \mathbb{R}^n$, so erhält man als Lösung

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^2 (2\pi)^{-n} \iint e^{i \langle x-y, \xi \rangle + (-1)^k t |\xi|} \frac{1}{2} u_0(y) dy d\xi.$$

Asymptotische Lösungen für allgemeinere Differentialgleichungen $P(t, x, D)u = 0$ erhielt Lax (1957). Er wählte den Ansatz

$$(3.1) \quad u(t, x) = e^{i\tau\phi(t, x)} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^i} a_i(t, x) \right) =:$$

$$= e^{i\tau\phi(t, x)} a(t, x),$$

so daß eine Überlagerung derartiger Terme (in τ) einen zur obigen Lösungsdarstellung analogen Ausdruck ergibt.

Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir hier die Zeitvariable t zu den x -Variablen dazu. Dann liefert Einsetzen des Ansatzes (3.1) in die Gleichung

$$(3.2) \quad P(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} P_{\alpha}(x) D_{\alpha}^{\alpha} u = \bar{P}(x, D)u + \sum_{|\alpha| < m} P_{\alpha}(x) D_{\alpha}^{\alpha} u = 0$$

mit geeignetem g :

$$P(x, D)u = e^{i\tau\phi} \left(\tau^m \bar{P}(x, \phi_x) a_0 + \tau^{m-1} g(\phi, a) \right) = 0$$

Damit erhält man, da a_0 nicht identisch 0 sein soll, mit geeigneten Operatoren L_j und rechten Seiten h_j :

$$(3.3) \quad \bar{P}(x, \phi_x) = 0, \quad \frac{1}{i} \sum \bar{P}_{\xi_k}(x, \phi_x) \frac{\partial a_0}{\partial x_k} + L_0(x) a_0 = 0 \quad (j=0)$$

$$L_j a_j = h_j \quad (j < 0)$$

Dies bedeutet, daß ϕ eine Lösung der Eikonalgleichung ist, die (lokal) durch Integration entlang der Bicharakteristiken gelöst werden kann (vgl. z.B. Hörmander (1976)). Das "Symbol" a genügt rekursiv definierten "Transportgleichungen" entlang der Bicharakteristiken. Operatoren E der Form

$$u = Eu_0 = \int e^{i\tau\phi(x, \xi)} a(x, \xi) \hat{u}_0(\xi) d\xi$$

sind nun ein Beispiel für (lokal definierte) Fourierintegraloperatoren, die Lösungsoperatoren hyperbolischer Gleichungen darstellen.

Die Theorie der Fourierintegraloperatoren wurde von Hörmander (1971a), Duistermaat und Hörmander (1972) entwickelt. Sie gestattet globale Aussagen, Reduktion von partiellen Differentialgleichungen auf Standardformen und Aussagen über die Ausbreitung von Singularitäten bei Pseudodifferentialgleichungen.

Das Ergebnis über Ausbreitung von Wellenfronten bei hyperbolischen Pseudodifferentialgleichungen ist implizit in dieser Arbeit von besonderer Bedeutung:

In Kapitel 4 wird gezeigt, daß mit einer Transformation, die durch einen Pseudodifferentialoperator gegeben ist, ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem in einer Umgebung

eines Randpunktes "entkoppelt" werden kann. Man erhält dadurch hyperbolische Pseudodifferentialgleichungen. Daß diese die Wellenfronten ebenfalls entlang der Bicharakteristiken des ursprünglichen Systems propagieren, erkennt man durch Betrachtung der Lösungsoperatoren dieser "entkoppelten" Einzelgleichungen, die durch Fourierintegraloperatoren gegeben sind.

In Kapitel 5 leiten wir, aufbauend auf Ergebnissen von Taylor (1975), der diese Theorie verwendet, zwei Klassen notwendiger Bedingungen für absorbierende Randbedingungen her. Es wird gezeigt, daß die Bedingungen von Engquist und Majda (1977) der ersten Klasse zuzuordnen sind. Wir konstruieren eine absorbierende Randbedingung, die der zweiten Klasse zuzurechnen ist. Diese Randbedingung wird durch einen Lösungsoperator der hyperbolischen Gleichung, also einen Fourierintegraloperator, beschrieben.

Lokale Definition und einige Eigenschaften

Eine Einführung in die lokale Theorie der Fourierintegraloperatoren gibt das Buch von Treves (1980b, Kap. VI). Die Darstellung lehnt sich daran an.

(3.4) Definition : $a \in S^m(X \times X) : \Leftrightarrow$

$a \in C^\infty(X \times X \times \mathbb{R}^n) \wedge \forall K \subset\subset X \forall \alpha \forall \beta \exists C \forall x, y \in K \forall \theta :$

$$|D_{x,y}^\beta D_\theta^\alpha a(x,y,\theta)| \leq C (1+|\theta|)^{m-|\alpha|}.$$

Die Elemente von S^m werden als Symbole bezeichnet.

(3.5) Definition: $\Phi(.,.,.)$ heißt reelle Phasenfunktion : $\Leftrightarrow$

- i) $\Phi \in C^\infty(X \times X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$, $\Phi(x, y, \theta) \in \mathbb{R}$
- ii) $\Phi(x, y, \tau\theta) = \tau\Phi(x, y, \theta) \quad \forall \tau > 0$
- iii) Φ hat keine kritischen Punkte, wenn es als Funktion von (x, θ) bzw. (y, θ) betrachtet wird (d.h. $\Phi_{x, \theta} \neq 0$, $\Phi_{y, \theta} \neq 0$).

(3.6) Definition: Der Operator E , der auf $C_0^\infty(X)$ durch

$$Eu(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\Phi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) u(y) dy d\theta$$

mit einer reellen Phasenfunktion Φ und $a \in S^m(X \times X)$ gegeben ist, heißt Fourierintegraloperator.

(3.7) Satz: E sei Fourierintegraloperator. Dann gilt:
 E bildet $C_0^\infty(X)$ stetig nach $C^\infty(X)$ ab und kann als stetige Abbildung von $E'(X)$ nach $D'(X)$ fortgesetzt werden.

(3.8) Satz: Es sei $\Sigma_\Phi := \{(x, y, \theta) \in X \times X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \Phi_\theta(x, y, \theta) = 0\}$.
 Ist $a(x, y, \theta) = 0$ in einer Umgebung von Σ_Φ , so ist E glättend.¹⁾

Dieser Satz besagt, daß Singularitäten des Operators E durch Σ_Φ vermittelt werden. Treves zeigt dann, daß bei hyperbolischen Pseudodifferentialgleichungen die Menge Σ_Φ des Lösungsoperators genau den bicharakteristischen Streifen entspricht (Φ wird wie in (3.3) als Lösung der Eikonalgleichung gewählt). Nach Aufarbeitung technischer Schwierigkeiten erhält er dann, daß sich Singularitäten bei Gleichungen mit einfachen reellen Charakteristiken entlang der Bicharakteristiken ausbreiten. Formal folgt dies aus Satz (3.9) und der Tatsache, daß Φ durch Lösung der Hamiltongleichungen

1) d.h. $E : E'(X) \rightarrow C^\infty(X)$.

gewonnen wird.

(3.9) Satz: E sei Fourierintegraloperator mit reeller Phasenfunktion ϕ und $u \in E'(X) \Rightarrow$

$$WF(Eu) \subset \{(x, \phi_x) / (y, -\phi_y) \in WF(u) \wedge \phi_\theta(x, y, \theta) = 0\}$$

oder, in der Terminologie von Satz (1.9) ausgedrückt:

$$WF'(E) \subset \{(x, \phi_x, y, -\phi_y) / \phi_\theta(x, y, \theta) = 0\}.$$

Läßt man nun $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ zu, so kann die Theorie im wesentlichen unverändert übernommen werden und man erhält zeitabhängige Lösungsoperatoren.

TEIL II : REFLEXION UND ABSORPTION VON SINGULARITÄTEN

4. Reflexion von Singularitäten

(4.1) Voraussetzungen und Notationen

Wir betrachten ein Gebiet Ω im $\mathbb{R}^{n+2}$,

$$\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^+ = \{(\bar{x}, y) / \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, y \geq 0\}.$$

In Ω sei ein reeller (Pseudo-)Differentialoperator P der Ordnung m mit Hauptsymbol $p(\bar{x}, y, \bar{\xi}, \eta)$ gegeben, für den die Hyperfläche $y=0$ nichtcharakteristisch ist (d.h. $p(\bar{x}, y, 0, 1) \neq 0$ für $y=0$). Das Polynom $p(\bar{x}_0, 0, \bar{\xi}_0, \eta)$ habe für $(\bar{x}_0, \bar{\xi}_0) \in T^*(\mathbb{R}^{n+1})$, $\bar{\xi}_0 \neq 0$, j reelle Nullstellen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_j$, die alle einfach sind.

Bei der Behandlung von Systemen von k Pseudodifferentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\frac{\partial}{\partial y} u = G(\bar{x}, y, D_{\bar{x}}) u$$

sei p definiert durch $p(\bar{x}, y, \bar{\xi}, \eta) := \det(\eta - i\sigma_G(\bar{x}, y, \bar{\xi}))$, wobei σ_G das Hauptsymbol von G ist. $G = G(y)$ ist dabei eine glatte Familie von Pseudodifferentialoperatoren¹⁾. Auch in diesem Fall gelte, daß p reell mit j einfachen reellen Nullstellen $\eta_1, \dots, \eta_j$ ist.

1) Wir haben keine Familien von PSDO definiert. Es ergibt sich dabei ein technisches Problem, das aber ohne großen Aufwand behoben werden kann (Taylor (1975)). Deshalb sprechen wir weiterhin einfach von Pseudodifferentialop., auch wenn es sich um Familien von PSDO handelt.

(Lax-Nirenberg (Nirenberg (1973)), und Majda-Osher (1975) beschäftigen sich mit derartigen skalaren Operatoren, Taylor (1975) behandelt Systeme).

Für $k = 1, \dots, j$ sei $\bar{\Gamma}_k$ die entsprechende Null-Bicharakteristik von P durch $(\bar{x}_0, 0, \bar{\xi}_0, \eta_k)$, Γ_k sei der Teil von $\bar{\Gamma}_k$, dessen Projektion in Ω fällt.

(4.2) Bemerkung: $\bar{\Gamma}_k$ ist also eine Trajektorie der Hamiltongleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= p_{\bar{\xi}} & , & & \dot{\bar{\xi}} &= -p_{\bar{x}} \\ \dot{y} &= p_{\eta} & , & & \dot{\eta} &= -p_y \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) &= \bar{x}_0 & , & & \bar{\xi}(0) &= \bar{\xi}_0 \\ y(0) &= 0 & , & & \eta(0) &= \eta_k \end{aligned}$$

Γ_k ist der Teil von $\bar{\Gamma}_k$ mit $y(s) \geq 0$ für kleine Parameterwerte s .

In Anlehnung an Nirenberg (1973) definieren wir nun:

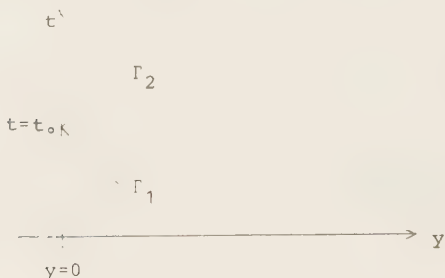
(4.3) Definition: Unter den obigen Bedingungen bilden die j Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_j$ eine reflektierte Familie von Null-Bicharakteristiken über $(\bar{x}_0, \bar{\xi}_0)$.

(4.4) Bemerkung und Definition: Bisher wurde noch keine Variable als Zeitvariable ausgezeichnet, wie sie insbesondere bei hyperbolischen Gleichungen gegeben ist. Ist $t = t(\bar{x})$ die Zeitvariable (O.E. $\bar{x} = (t, x)$, $\bar{\xi} = (1, \xi)$), d.h. ist P strikt hyperbolisch in t -Richtung, so bezeichnen wir

diejenigen Γ_k , für die $\ddot{y}t < 0$ gilt, als ausfallende Bi-
 charakteristiken (bzw. $\pi(\Gamma_k)$ als ausfallende Strahlen),
 die anderen als reflektierte Bicharakteristiken.

(4.5) Beispiel: $P(t, x, \partial_t, \partial_y) = \partial_t^2 - \partial_y^2$.

Gegeben sei (t_0, τ_0) . Die ausfallende Bicharakteristik ist
 Γ_1 , die reflektierte B.C. Γ_2 ; zur Berechnung der Null-Bi-
 charakteristiken vergleiche (2.19).



(4.6) Beispiel: $P(t, x, y, \partial_t, \partial_x, \partial_y) = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$

Gegeben sei $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$. $(t_0, x_0, 0)$ definiert einen
 Randpunkt des Gebiets Ω , (τ_0, ξ_0) eine Richtung in der
 Randhyperfläche $y=0$, die zusammen mit dem Normalenvektor
 zu dieser Hyperfläche eine Ebene aufspannt, in der die
 reflektierte Familie von bicharakteristischen Kurven
 (oder genauer: ihre Projektion in Ω) über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$
 liegt. Dies entspricht der physikalischen Anschauung:
 Ausfallende und reflektierte Strahlen liegen in einer
 Ebene.

Lax und Nirenberg (Nirenberg (1973)) gewinnen Aussagen
 über die Reflexion von Wellenfronten am Rand $y=0$ mit

einem Resultat über die Faktorisierung von Differentialoperatoren in bicharakteristische Richtungen:

(4.7) Satz: $P(t, x, y, \partial_t, \partial_x, \partial_y)$ sei ein skalarer Differentialoperator m -ter Ordnung. $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ sei gegeben, η_0 sei eine einfache Nullstelle von $p(t_0, x_0, 0, \tau_0, \xi_0, \eta) = 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von $(t_0, x_0, 0, \tau_0, \xi_0)$ und einen Pseudodifferentialoperator E erster Ordnung mit Symbol $\eta = \eta(t, x, y, \tau, \xi)$ sowie einen Operator $Q(t, x, y, \partial_t, \partial_x, \partial_y)$ der Ordnung $m-1$, sodaß das Symbol von

$$P - (\partial_y - E)Q$$

in U und für alle η verschwindet.

(4.8) Beispiel: Wir betrachten wieder das Beispiel (4.6):

$$\eta(t, x, y, \tau, \xi) = i\sqrt{\tau^2 - \xi^2}$$

$$q(t, x, y, \tau, \xi, \eta) = -(i\eta + i\sqrt{\tau^2 - \xi^2})$$

Das Symbol von $P - (\partial_y - E)Q$ ist:

$$(\eta^2 + \xi^2 - \tau^2) + (i\eta - i\sqrt{\tau^2 - \xi^2})(i\eta + i\sqrt{\tau^2 - \xi^2})$$

Das Ergebnis über Reflexion von Singularitäten von Lax und Nirenberg bzw. seine Verallgemeinerung von Majda-Osher (1975) gilt für skalare Gleichungen; wir gehen hierauf nicht ein, sondern beschäftigen uns mit hyperbolischen Systemen erster Ordnung.

Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist ein Satz von Taylor (1975), der das System mit einer Transformation, die durch einen Pseudodifferentialoperator gegeben ist, auf Diagonalgestalt zu transformieren ermöglicht. Dieses Verfahren entspricht völlig der Faktorisierung aus (4.7) (4.8), die ebenfalls in Teil III zur Herleitung eines numerischen Verfahrens

verwendet wird.

(4.9) Satz: Es gelten die Voraussetzungen (4.1) für das System

$$\partial_y u = G(t, x, y, \partial_t, \partial_x) u.$$

Dann gibt es einen Pseudodifferentialoperator $V(t, x, y, \partial_t, \partial_x)$ der Ordnung 0, so daß in einer konischen Umgebung U von $(t_0, x_0, 0, \tau_0, \xi_0)$ der Operator V elliptisch ist und das System mit der Transformation $w = Vu$ folgende Form annimmt:

$$\partial_y w = \begin{bmatrix} \Lambda_1(t, x, y, \partial_t, \partial_x) \\ \vdots \\ \Lambda_j(t, x, y, \partial_t, \partial_x) \\ E_+ \\ E_- \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} w + R w$$

Die Symbole von $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_j, E_+, E_-$ sind dabei homogen vom Grad 1, jene von $A_1, \dots, A_j, B_1, B_2$ vom Grad ≤ 0 ; R ist ein glättender Operator. Weiter haben die $\Lambda_k, 1 \leq k \leq j$ rein imaginäre Symbole, die Symbole von E_+ und E_- entsprechen den Eigenwerten von G mit $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ bzw. $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

(4.10) Bemerkung: Die Eigenwerte λ_k von G , die den Operatoren Λ_k entsprechen, erzeugen genau die reflektierte Familie von Null-Bicharakteristiken.

Taylor beweist mit dieser Transformation eine allgemeine Aussage über Reflexion von Singularitäten:

(4.11) Satz: Es gelten die Voraussetzungen von (4.9).

w sei folgendermaßen partitioniert:

$$w = \begin{bmatrix} \bar{w}^I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{w}^{II} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{w}^{III} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{w}^{IV} \end{bmatrix} =$$

$$= w^I + w^{II} + w^{III} + w^{IV} ; \quad 1)$$

dabei habe $\bar{w}^I$ j_0 Komponenten, $\bar{w}^{II}$ habe $j-j_0$ Komponenten, $\bar{w}^{III}$ entspreche E_+ , $\bar{w}^{IV}$ entspreche E_- .

Es sei $p^I u := V^{-1} w^I$, $p^{II} u := V^{-1} w^{II}$ etc..

Die Lösung des Randwertproblems

$$\partial_y u = Gu, \quad \beta u \Big|_{y=0} = 0, \quad \beta \in L^0,$$

sei glatt entlang jener Bicharakteristiken über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, die $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ entsprechen.

Impliziert dann das System von Pseudodifferentialgleichungen

$$p^I u \Big|_{y=0} = f, \quad p^{III} u \Big|_{y=0} = g, \quad u \Big|_{y=0} = h$$

mit Funktionen f, g, h , die bei $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ glatt sind, die Glattheit von $p^{II} u \Big|_{y=0}$ in einer Umgebung von $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, so folgt:

u ist auch glatt entlang der übrigen bicharakteristischen Streifen über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ in $y > 0$.

Um eine Klassifikation absorbierender Randbedingungen zu erhalten, müssen (4.11) und ein späterer, darauf aufbauender Satz etwas erweitert werden. Das leistet für (4.11):

1) w^I, w^{III} entsprechen später auslaufenden Anteilen der Lösung, w^{II}, w^{IV} einlaufenden bzw. reflektierten Anteilen.

(4.12) Korollar: Die obige Aussage gilt auch für das inhomogene Randwertproblem

$$\Delta_y u = Gu, \quad \Delta u|_{y=0} = e$$

mit $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \notin WF(e)$.

Beweis: Die Aussage betrifft eine konische Umgebung von $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$. Dort ist e aus C^∞ . Der Beweis von Taylor gilt auch in diesem Fall.

5. Absorption von Singularitäten

Das Ziel dieser Arbeit ist, Randbedingungen zu finden, die auf den Rand auftreffende Störungen absorbieren, nicht reflektieren. In gewisser Weise ist dies eine zum vorangehenden Abschnitt inverse Fragestellung: Angenommen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ sind ausfallende Bicharakteristiken über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ im Sinne unserer Definition im letzten Abschnitt, wobei $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ in $WF(u)$ liegen; mit welchen Randbedingungen kann dann erreicht werden, daß die reflektierten Bicharakteristiken $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$ nicht in $WF(u)$ liegen? Diese Frage soll nun untersucht werden. Zunächst führen wir noch einen Begriff ein:

(5.1) Definition: Gegeben sei das strikt hyperbolische System von k Gleichungen

$$u_t = Au_y + \sum_{l=1}^n B_l u_{x_l} + F(t, x, y)$$

in $y \geq 0$, A nichtsingulär,

mit Anfangsdaten $u(0, x, y) = 0$ und Randdaten

$$u^{II}(t, x, 0) = Su^I(t, x, 0) + g(t, x) \quad .$$

Dabei entspreche die Partitionierung von u in (u^I, u^{II}) der Partitionierung von A ,

$$A = \begin{bmatrix} A^I & 0 \\ 0 & A^{II} \end{bmatrix}; \quad A^I = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_r \end{bmatrix} > 0; \quad A^{II} = \begin{bmatrix} a_{r+1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_k \end{bmatrix} < 0$$

die ohne Beschränkung gewählt werden kann; S ist eine Rechtecksmatrix.

Das Anfangs/Randwertproblem heißt sachgemäß im Sinne von Kreiss

$$: \Leftrightarrow \int_0^T \|u(t, x, 0)\|^2 dt + \int_0^T \|u(t, x, y)\|^2 dt \leq K(T) \left(\int_0^T \|F(t, x, y)\|^2 dt + \int_0^T \|g(t, x)\|^2 dt \right),$$

wobei $\|\cdot\|$ die L^2 - Norm in den x - bzw (x, y) - Variablen bezeichnet.

(5.2) Bemerkung: Kreiss (1970) führte obige Definition für Sachgemäßheit ein und gab notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Anfangs/Randwertproblem (auch mit variablen Koeffizienten bei einer etwas verallgemeinerten Definition) sachgemäß ist.

Wichtig für unsere folgenden Überlegungen ist das folgende Ergebnis:

(5.3) Satz: Gegeben sei ein strikt hyperbolisches System von k Gleichungen

$$u_t = Au_y + \sum_{l=1}^n B_l u_{x_l}$$

in $\Omega = \{(t, x, y) / t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^+\}$. Auf $\partial\Omega = \{(t, x, 0)\}$ sei eine Randbedingung der Form

$$\beta u \Big|_{y=0} = g, \quad \beta \in L^0(\partial\Omega), \quad g \in D'(\partial\Omega)$$

gegeben. A sei invertierbar, d.h. $\partial\Omega$ ist nichtcharakteristisch.

Über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*(\partial\Omega) \setminus 0$ liegen j bicharakteristische Streifen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_j$, die einfachen Nullstellen η von $\det(i\tau_0 - A\eta - \sum B_1 i \xi_{01})$ entsprechen.

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ seien ausfallende Bicharakteristiken, $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$ seien reflektierte Bicharakteristiken, $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \notin WF(g)$.

Das Problem sei sachgemäß im Sinne von Kreiss. Dann gilt:

Ist $u \in C^\infty$ entlang $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0} \Rightarrow \exists t_1 > t_0 \quad \forall t \in (t_0, t_1):$
 $u \in C^\infty$ entlang $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$.

Taylor (1975) beweist eine derartige Aussage für homogene Randdaten aufbauend auf Satz (4.11). Obige Aussage beruht auf Korollar (4.12). Zuvor ein Hilfssatz:

(5.4) Lemma: Man betrachte die Partitionierung von w nach

(4.11). $\lambda_1, \dots, \lambda_{j_0}$ seien dabei reell und größer 0, $\lambda_{j_0+1}, \dots, \lambda_j$ reell und kleiner 0. Die Eigenräume von G zu dieser Partition seien $E^I, \dots, E^{IV}$, wobei

$G(t, x, y, \tau, \xi) = A^{-1}(i\tau - \sum B_1 i \xi_1)$ ist. Dann folgt, wenn β

das Hauptsymbol von β bezeichnet, aus der Sachgemäßheit des ARWP

(5.3): $(E^{II} + E^{IV}) \cap \ker(\beta_0) = \{0\}^1$.

Beweis: Taylor (1975)

- 1) Anschaulich: Es gibt keine einlaufenden Anteile der Lösung die den homogenen Randbedingungen genügen und die nicht 0 sind.

Beweis von (5.3): Wir haben nur Korollar (4.12) anzuwenden.

Dazu ist zu zeigen: $P^{II}u|_{y=0}$ ist glatt bei $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$. Es ist aber $P^{II}u = V^{-1}w^{II}$ und w^{II} ist durch die in $U(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ glatten Randwerte eindeutig bestimmt, wie Lemma (5.4) zeigt.

V ist ein elliptischer Pseudodifferentialoperator in $U(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, damit folgt nach (2.12) (2.13) die Aussage.

Diese Reflexionsaussage bei hyperbolischen Gleichungen mit inhomogenen Randdaten wird uns später ein neues Verfahren für die Absorption von Singularitäten am Rand liefern. Zur näheren Beschreibung dient folgender Begriff:

(5.5) Definition: Gegeben sei ein strikt hyperbolisches System $u_y = Gu$ in Ω ; Ω, G wie in (5.3) (5.4), zusammen mit einer Randbedingung $\beta u|_{y=0} = g$, $g \in D'(\partial\Omega)$, $\beta \in L^0$, auf $\partial\Omega$.

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ seien die ausfallenden Bicharakteristiken über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$ die reflektierten Bicharakteristiken.

Die Randbedingung $\beta u|_{y=0} = g$ heißt absorbierend für Singularitäten in $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*(\partial\Omega) \setminus 0$: ∞

Für eine Lösung u der Gleichung mit

$\exists j_1, 1 \leq j_1 \leq j_0, \Gamma_{j_1} \subset WF(u)$ gilt:

$\exists t_1 > t_0 \forall t \in (t_0, t_1) \forall j_2 : j_0 < j_2 \leq j : \Gamma_{j_2} \cap WF(u) = \emptyset$.

Bemerkung: Da wir nur lokale Aussagen beweisen, verzichten wir im folgenden auf den Zusatz "bis $t_1 > t_0$ ".

(5.6) Satz: Gegeben sei die strikt hyperbolische Gleichung

$$u_y = A^{-1} (u_t - \Sigma B_1 u_{x_1}) \text{ in } \Omega,$$

mit einer Randbedingung $\Sigma u_{x_1} = g$ auf $\partial\Omega$ wie in (5.3).

Notwendig dafür, daß die Randbedingung Singularitäten bei (t_0, x_0, t_0, t_0) absorbiert, ist die Gültigkeit einer der beiden folgenden Aussagen:

(5.6.1) Das Problem mit inverser Zeitrichtung ist nicht sachgemäß im Sinne von Kreiss (vgl. (5.1))

oder

$$(5.6.2) \quad g \notin C^\infty_{\text{lei}}(t_0, x_0, t_0, t_0) \quad .$$

Beweis: Aus der Hyperbolizität in t -Richtung folgt die Hyperbolizität in $(-t)$ -Richtung. Für das rückwärts gestellte Problem sind jedoch $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ die reflektierten Bichar. und $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$ die ausfallenden Bicharakteristiken, wie man leicht sieht. Anwendung von Satz (5.3) auf dieses Problem zeigt, daß, da ein $\Gamma_{j_1} \in \text{WF}(u)$ für ein $j_1 \leq j_0$ und u glatt entlang $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$ ist, eine der Voraussetzungen verletzt sein muß. Die Voraussetzung der "einfachen" Bicharakteristiken ist implizit in der Definition von absorbierend enthalten, damit bleiben nur die Möglichkeiten (5.6.1) (5.6.2).

(5.7) Bemerkung: Notwendige Bedingungen für skalare Gleichungen höherer Ordnung erhält man durch Reduktion auf ein System erster Ordnung. Taylor (1974) gibt eine derartige Reduktion an:

Es sei $L = \partial_t^{m_0} - \sum_{l=0}^{m-1} A_{m-l}(t, x, y, \partial_x, \partial_y) \partial_t^l$, A_{m-l} eine in

t glatte Familie von Pseudodifferentialoperatoren der

Ordnung $m-l$. Es sei Λ der Operator mit Symbol $(1 + |\eta|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$.

Mit $u_1 := \Lambda^{m-1} u$, $u_2 := \partial_t \Lambda^{m-2} u$, $u_3 := (\partial_t)^2 \Lambda^{m-3} u$ etc.

wird die Gleichung $Lu = f$ übergeführt in das System erster

Ordnung

$$\partial_t \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \Lambda 0 & \dots & 0 \\ 0 0 \Lambda 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ & & \Lambda \\ b_1 & \dots & b_m \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

mit geeigneten b_i .

Man kann notwendige Bedingungen auch direkt aus Satz 1 in

Majda-Osher (1975) entnehmen.

(5.8) Bemerkung: Satz (5.6) bietet zwei Möglichkeiten, Bedingungen am Rand zu konstruieren, die Singularitäten nicht reflektieren. Während sich etliche Arbeiten sowohl implizit als auch explizit auf (5.6.1) stützen, scheint Punkt (5.6.2) noch nicht zur Beseitigung von reflektierten Singularitäten benutzt worden zu sein.

Nachdem wir nun die abstrakten Prinzipien hergeleitet haben, beschäftigen wir uns mit konkreten Fällen. Zunächst betrachten wir die Bedingungen von Engquist-Majda (1977), die als erste einen systematischen theoretischen Ansatz wählten.

(Auf die numerisch und physikalisch motivierten Ansätze werden wir kurz in Kapitel 9 eingehen.)

(5.9) Satz: Die Methode von Engquist und Majda zur Absorption von Singularitäten, die nahe der Normalen einfallen, genügt der Bedingung (5.6.1).

(5.10) Darstellung der Methode: Wir folgen der Darstellung in Engquist-Majda (1977, Abschnitt 2A).

Das System

$$\partial_t u = A(x,y) \partial_y u + B(x,y) \partial_x u$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{j_0} \end{bmatrix} > 0, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{j_0+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} < 0$$

wird umgeformt zu

$$\partial_y u = A^{-1} \partial_t u + B' \partial_x u =: Gu$$

Das Symbol von G wird dann mit Hilfe der Methode von Taylor (vgl. (4.9)) teilweise diagonalisiert. Die Transformation, die durch einen Operator V mit Symbol $v(x,y,\tau,\xi)$ gegeben ist, bringt das System $\partial_y u = Gu$ in der Nähe der Normalen $(\tau,\xi) = (1,0)$ auf die Form

$$\partial_y w = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(x,y,\partial_t,\partial_x) & \Lambda_{12} \\ 0 & \Lambda_{22} \end{bmatrix} w$$

und Λ_{22} hat als Hauptsymbol bei $(x,y,1,0)$:

$$\sigma_{\Lambda_{22}}(x,y,1,0) = \begin{bmatrix} \lambda_{j_0+1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^{-1} \end{bmatrix}$$

(Die Forderung, daß die Singularitäten in der Nähe der Normalen $(1,0)$ einfallen, verhindert das Auftreten von "glancing rays", bzw. daß Anteile E_+ , E_- (vgl. (4.9)) auftreten).

Die Randbedingung von Engquist-Majda ist nun mit

$$\pi_{j_0}(w_1, \dots, w_k) := (w_{j_0+1}, \dots, w_k)$$

gegeben durch

$$\pi_{j_0}(w) \Big|_{y=0} = \pi_{j_0}(V(x, y, \partial_t, \partial_x)u) \Big|_{y=0} = 0 \quad .$$

Beweis von (5.9): Die Aussage folgt mit Hilfe von Lemma (5.4). Für das rückwärts gestellte Problem ist der entsprechende Eigenraum E^{II} der Raum der Eigenfunktionen zu $\lambda_1, \dots, \lambda_{j_0}$. Jede dieser Funktionen erfüllt die Randbedingung, was Lemma (5.4) bei sachgemäßen Problemen jedoch ausschließt.

(5.11) Bemerkung: Wir versuchen nun, Randbedingungen herzuleiten, die (5.6.2) genügen, d.h. eine Funktion g zu finden, für die $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ in $WF(g)$ liegt.

Dazu dient die folgende Überlegung: Man betrachtet einen Teil des Gebietes, in dem die Gleichung homogen ist und in dem die Anfangsdaten zur Zeit $t=0$ verschwinden, z.B.

$\bar{\Omega} = \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / y \leq y_1\}$. (Diese Annahme ist für einige physikalische Anwendungen durchaus realistisch.)

Dann ist nach den Ergebnissen über die Ausbreitung von Singularitäten der Lösung einer hyperbolischen Gleichung klar, daß Singularitäten der Lösung in $\bar{\Omega}$ nur entlang der Bicharakteristiken nach $\bar{\Omega}$ gelangt sein können. Ist bekannt, auf welcher Bicharakteristik die Singularitäten z.B. bei (t, x, y_1) liegen, so kann mit Hilfe eines Lösungsoperators E

bestimmt werden, wann diese Singularität einen künstlichen Rand $\partial\Omega = \{(t, x, y_0) / y_0 < y_1\}$ trifft.

(5.12) Bemerkung: Die soeben beschriebene Vorgehensweise werden wir nun etwas präzisieren. Zuvor sei noch darauf hingewiesen, daß dieses Vorgehen, mit dem Fourierintegraloperator E ersetzt durch einen Lösungsoperator einer Differenzengleichung, die Konstruktion einer numerisch brauchbaren Methode zur Unterdrückung von Randreflexionen ermöglicht (vgl. Kapitel 8).

Da jedoch eine direkt durch einen Fourierintegraloperator gegebene Randbedingung nicht numerisch anwendbar ist, formulieren wir die folgende Aussage nur für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und nur lokal. Eine globale Randbedingung dieser Art anzugeben ist mit der globalen Konstruktion eines Lösungsoperators wie in Duistermaat (1973, Satz 5.1.6) möglich. Gleichungen mit variablen Koeffizienten können ebenfalls behandelt werden.

(5.13) Konstruktion einer Randbedingung:

Gegeben sei das strikt hyperbolische System mit konstanten Koeffizienten

$$\partial_y u = A^{-1} (\partial_t u - \sum B_1 \partial_{x_1} u) \quad .$$

Über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*(\partial\Omega) \setminus 0$ liegen j bicharakteristische Streifen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_j$, die einfachen Nullstellen von p (vgl. (4.1)) entsprechen. $\Gamma_1, \dots, \Gamma_j$ seien ausfallende Bicharakteristiken, $\Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_j$ seien reflektierte B.C.. $\partial\Omega = \{(t, x, 0)\}$ ist dabei ein künstlicher Rand, der das Gebiet auf $y \geq 0$ beschränkt.

Man betrachte eine Hyperebene $y=\varepsilon$ ¹⁾, die von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ (bzw. deren Projektionen in den (t, x, y) -Raum) geschnitten wird. Dies ist möglich, da aufgrund der Einfachheit der Nullstellen η gilt, daß $\dot{y} = -p_\eta(t_0, x_0, 0, \tau_0, \xi_0, \eta_1) \neq 0$, so daß die bicharakteristischen Kurven mit $y=0$ einen Winkel einschließen, der nicht 0 ist.

u ist für $t < t_0$ auf $y=\varepsilon$ bekannt, der Schnitt von Γ_1 mit $y=\varepsilon$ erfolge zur Zeit t_1 .

Wir betrachten nun nur noch das nach (4.9) transformierte System $\partial_y w = G' w$; V, Λ, w seien wie in (4.9).

Gegeben seien j_0 Anfangswertprobleme in $\{(t, x, y) / y \in \mathbb{R}^+\}$

$$\partial_y s_1 = G' s_1, \quad s_1(t=t_1) = a_1, \quad 1 \leq j \leq j_0.$$

mit: a_1 hat in einer genügend kleinen Umgebung von $y=\varepsilon$ in der 1-ten Komponente den Wert der 1-ten Komponente von w , sonst den Wert 0:

$$s_{1(r)}(t=t_1) = (V(\partial_t, \partial_x)u|_{t=t_1}) \delta_{r1} = w_{(1)}(t=t_1) \delta_{r1}$$

wobei (r) die r -te Komponente und δ das Kronecker-Symbol bezeichnet.

Die r -te Zeile jedes dieser (entkoppelten) Gleichungssysteme ist eine hyperbolische Pseudodifferentialgleichung, die durch einen Fourierintegraloperator E_r gelöst werden kann, die Bicharakteristik des r -ten Problems ist gerade Γ_r . Einbettung dieser Lösung in den $\mathbb{R}^k$ an der r -ten Stelle vermittelt

$$i_r(E_r s_r(t=t_r)) = \bar{s}_r = (0, \dots, 0, E_r s_r(t=t_r), 0, \dots, 0)$$

↑
r-te Stelle

1) Der Träger der Anfangsdaten liege in $y > \varepsilon$.

ergibt eine Lösung des Systems mit der jeweiligen Anfangsbedingung s_r .

Behauptung: $w|_{y=0} = \sum_{r=1}^{j_0} \bar{s}_r(t, x, y)|_{y=0}$ ist eine Randbedingung am künstlichen Rand $y=0$, die Singularitäten über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ absorbiert.

Beweis: Die Lösung w des transformierten Problems hat entlang $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ dieselben Wellenfronten wie die $\bar{s}_r$, die Differenz $w - \sum \bar{s}_r$ ist dort also glatt¹⁾. Die Lösungen der j_0 Anfangswertprobleme sind glatt entlang $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$.

Wir wenden nun Korollar (4.12) auf die Differenz $w - \sum \bar{s}_r$ an: $w - \sum \bar{s}_r$ ist eine Lösung des Systems $w - \sum \bar{s}_r$ ist glatt entlang der ausfallenden Bicharakteristiken $w - \sum \bar{s}_r|_{y=0}$ ist glatt bei $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ ebenfalls nach Konstruktion.

Nach Korollar (4.12) ist damit $w - \sum \bar{s}_r$ glatt entlang $\Gamma_{j_0+1}, \dots, \Gamma_j$, da $\sum \bar{s}_r$ dort glatt ist, folgt, daß w dort glatt sein muß. Damit ist die Randbedingung absorbierend.

Es ist noch zu zeigen, daß $s_r|_{y=0}$ wohldefiniert ist.

Beweis: Nach Satz (1.6) bzw. Bemerkung (1.7) ist die Restriktion wohldefiniert, wenn $WF(s_r) \cap H^\perp = \emptyset$, wobei $H^\perp$ das Normalenbündel des Randes ist. Dies ist erfüllt, da die Bicharakteristiken $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$ die Wellenfronten von s_r , $1 \leq r \leq j_0$ tragen und der Rand nichtcharakteristisch ist ($p(t_0, x_0, 0, 0, 0, 1) = \det(A) \neq 0$).

1) Die Summe ist für $t > \max(t_1 / 1 \leq l \leq j_0)$ definiert.

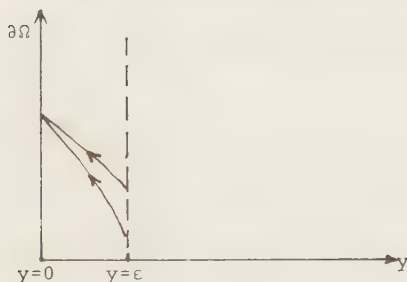
(5.14) Bemerkung: Der globale Ansatz besteht darin, für alle $t < t_0$ ein Anfangswertproblem zu lösen. Die Familie von Anfangswertproblemen kann über das Prinzip von Duhamel zu einem inhomogenen Problem umgeformt werden, das mit einem globalen Fourierintegraloperator gelöst wird.

(5.15) Bemerkung: Wir geben eine anschauliche Darstellung der Konstruktion:

Die Gleichung wird separiert in Einzelgleichungen entlang der Bicharakteristiken $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j_0}$.

An den Schnittstellen der Bicharakteristiken mit $y=\varepsilon$ wird bestimmt, welche Singularität w dort besitzt.

Dann wird jede der Einzelgleichungen mit der entsprechenden Singularität als Anfangsbedingung mit Hilfe eines Fourierintegraloperators gelöst, die erhaltenen Werte der Lösungen am Rand werden addiert und als Randbedingung vorgeschrieben.



TEIL III : ANWENDUNGEN DER THEORIE

6. Allgemeine Überlegungen

Die letzten Abschnitte befaßten sich mit der allgemeinen Theorie der Absorption von Singularitäten. Die Bedeutung der so gewonnenen Ergebnisse für klassische Lösungen besteht darin, daß (5.10) und (5.13) asymptotisch für hochfrequente Anteile der Lösung gelten. Die Theorie der Wellenfronten und der Fourierintegraloperatoren ist ein Formalismus, der diese Aussage präzisiert (vgl. auch Lax (1957)).

Für den Spezialfall der Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten im $\mathbb{R}^n$ kann die absorbierende Randbedingung (5.10) auch ohne Zuhilfenahme der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren gewonnen werden (siehe (7.5)). Die so gewonnenen Randbedingungen, auch wenn sie formal als Pseudodifferentialoperator geschrieben werden, sind somit für den gesamten Frequenzbereich gültig.

Das analoge Vorgehen zur Konstruktion (5.13) ist, die exakte Lösung der Gleichung im unbeschränkten Gebiet auf dem Rand vorzuschreiben. Während dieser Gedankengang bei kontinuierlichen Problemen keine anwendbaren Ergebnisse liefert, werden wir bei diskretisierten Problemen ein neues allgemeines Verfahren herleiten, das für den Spezialfall der 7-Punkt-Approximation der Wellengleichung in zwei Raumdimensionen gerade das Verfahren von Trautenberg (1980) ergibt.

Bevor wir nun genauer überlegen, wie die theoretischen Ergebnisse auch numerisch anwendbar sind, ist es sinnvoll, den Begriff "absorbierend" näher zu beschreiben.

In Definition (5.5) wurde der Begriff "absorbierend für Singularitäten" ohne Bezug darauf, ob die Gleichung auch im linken Halbraum $y < 0$ definiert ist, eingeführt. Nimmt man an, daß die Gleichung auch dort definiert ist und mit Anfangsdaten und Inhomogenitäten so gegeben ist, daß die in den Halbraum $y \geq 0$ einlaufenden Bicharakteristiken der im ganzen Raum gegebenen Gleichung keine Singularitäten tragen, so läßt sich (5.5) umformulieren zu:

Eine Randbedingung heißt nichtreflektierend für Singularitäten über $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*(\partial\Omega) \setminus 0$, wenn die Lösung u im gesamten Raum und die Lösung u_H im Halbraum (mit den RB) entlang der reflektierten Bicharakteristiken gleich sind mod C^∞ .

Eine derartige Situation lag auch der Konstruktion in (5.13) zugrunde.

Diese Interpretation des Begriffes "absorbierend" bzw. "nichtreflektierend" ist auch der Situation angemessen, die wir numerisch bearbeiten wollen: Es ist eine Gleichung in einem großen, möglicherweise unbeschränkten Gebiet gegeben. Aus Speicherplatz-, Rechenzeit- oder sonstigen Gründen ist eine (numerische) Lösung nur in einem Teilgebiet möglich. (Koordinatentransformation beseitigt die Problematik nicht, vgl. Grosch-Orszag (1977)).

Auf dem Rand des Teilgebietes sind nun Randbedingungen vorzuschreiben, um das Problem sachgemäß zu stellen.

Die Frage ist nun, wann die Lösung im Teilgebiet $y \geq 0$ die Lösung im gesamten Gebiet, eingeschränkt auf $y \geq 0$, approximiert. Gustafsson und Kreiss (1979) zeigen, daß eine derartige Aussage nur gültig sein kann, wenn keine Einflüsse von $y < 0$ in $y \geq 0$ spürbar werden. Dies ist z.B. der Fall, wenn die Anfangsdaten und Inhomogenitäten ihren Träger in $y \geq \epsilon > 0$ haben und die Koeffizienten der Gleichung für $y \leq \epsilon$ konstant sind. Wir werden uns in Zukunft auf diesen Fall beschränken.

Wir definieren analog zu (5.5):

$$\begin{aligned} \underline{(6.1) \text{ Definition:}} \quad \Omega^+ &= \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{n+2} / y \geq 0, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\} \\ \partial\Omega &= \{(t, x, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}\} \\ \Omega &= \mathbb{R}^{n+2} \end{aligned}$$

In Ω sei eine strikt hyperbolische Gleichung $Lu = f$ mit Anfangsdaten $u(0, x, y) = u_0(x, y)$ gegeben, es gelte $\text{supp}(f) \subset \{(t, x, y) / y \geq \epsilon\}$, $\text{supp}(u_0) \subset \{(x, y) / y \geq \epsilon\}$.

Auf $\partial\Omega$ sei eine Randbedingung gegeben, so daß die Gleichung in Ω^+ sachgemäß ist im Sinne von Kreiss. Die Lösung des Problems in Ω sei u , die des Problems in Ω^+ sei u_H .

Dann heißt die Randbedingung absorbierend : ∞

$$u - u_H = 0 \quad \text{in } \Omega^+.$$

Für diskretisierte Gleichungen heißt die Randbedingung numerisch absorbierend, wenn für die diskreten Lösungen $\bar{u}, \bar{u}_H$ gilt:

$$\bar{u}(k\Delta t, l\Delta x, m\Delta y) - \bar{u}_H(k\Delta t, l\Delta x, m\Delta y) = 0$$

an allen Gitterpunkten $k\Delta t, l\Delta x, m\Delta y$ in Ω^+ .

Wir kommen nun zurück zu dem Problem, nichtreflektierende, d.h. absorbierende Randbedingungen zu finden. Dazu werden

die theoretischen Aussagen des letzten Abschnittes verwendet.

(6.2) Bemerkung: Die Randbedingung (5.10) von Engquist und Majda ist asymptotisch für hohe Frequenzen absorbierend, bei der Wellengleichung für alle Frequenzen (vgl. (7.5)). Das Problem besteht hier darin, einen Pseudodifferentialoperator zu berechnen, der die Faktorisierung (4.9) leistet und ihn so durch einen klassischen Differentialoperator zu approximieren, daß man ein (leicht diskretisierbares) sachgemäß gestelltes Anfangs/Randwertproblem erhält. Dazu werden wir ein neues Verfahren herleiten und seine theoretische und numerische Überlegenheit gegenüber dem Verfahren von Engquist und Majda (1977) (1979) zeigen.

(6.3) Bemerkung: Die Fourierintegraloperator-RB aus (5.13) ist praktisch nicht verwendbar, jedoch ist die Idee anwendbar: Man verschaffe sich mit Hilfe eines Lösungsoperators die exakte Lösung am Rand und schreibe diese als Randbedingung vor. Wegen $u - u_H = 0$ am Rand und für $t=0$ folgt dann aufgrund der Sachgemäßheit, daß u gleich u_H in $y \geq 0$ ist. Bei Differentialgleichungen führt diese Idee auf keine brauchbaren Verfahren, aber für Differenzenapproximationen hyperbolischer Gleichungen kann ein Lösungsoperator und eine numerisch absorbierende Randbedingung angegeben werden. Die Herleitung dieses Lösungsoperators werden wir in Kapitel 8 durchführen.

Die Beziehung zwischen (6.2) und (6.3) soll nun kurz am Beispiel der Wellengleichung in einer Raumdimension plausibel gemacht werden.

(6.4) Beispiel: $\Omega = \{(t,y) / t \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

$$\Omega^+ = \{(t,y) / t \geq 0, y \geq 0\}$$

Mit $L = \partial_t^2 - \partial_y^2 = (\partial_t + \partial_y)(\partial_t - \partial_y) =: L_1 L_2$

lautet die Gleichung

$$Lu = 0$$

Anfangsdaten:

$$u(0,y) = h(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R} \quad ,$$

$$u_t(0,y) = g(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R} \quad .$$

Es gelte $\text{supp}(g) \cup \text{supp}(h) \subset \{y / y \geq \epsilon > 0\}$

Dann ist die Lösung u darstellbar durch

$$u = u^I + u^{II} \quad ,$$

mit

$$u^I \in \ker(L_1) \quad ,$$

$$u^{II} \in \ker(L_2) \quad ;$$

und es gilt

$$u^I(t,y) = 0 \quad \text{für } y < \epsilon.$$

Die Faktorisierung von L gelingt hier ohne Zuhilfenahme eines Pseudodifferentialoperators und die Randbedingung nach (6.2)

lautet damit

$$0 = -L_2 u \Big|_{y=0} = -L_2 u^I \Big|_{y=0} = -(\partial_t - \partial_y) u^I \Big|_{y=0}$$

d.h. u^I ist konstant entlang der ausfallenden Bicharakteristik, dort war u^I gleich Null, man erhält

$$u \Big|_{y=0} = (u^I + u^{II}) \Big|_{y=0} = u^{II} \Big|_{y=0} \quad .$$

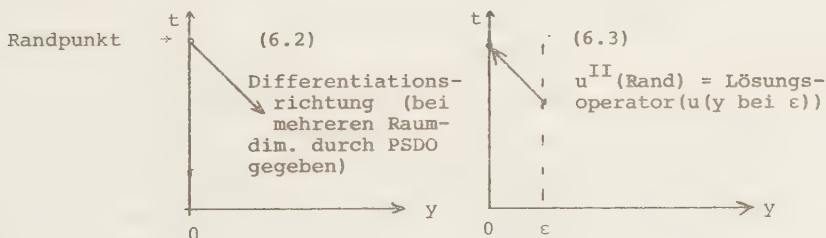
Dies ist aber genau die Randbedingung, die sich aus (6.3) ergibt :

$$u \Big|_{y=0} = u^{II} \Big|_{y=0} \quad .$$

Der Unterschied zwischen beiden Verfahren ist wie folgt zu verstehen:

Beim Verfahren nach (6.2) befindet man sich am Rand und interessiert sich für Impulse, die aus dem Gebiet $y > 0$ kommen. Im anderen Fall ((6.3)) befindet man sich etwas im Inneren und weiß, wann die Impulse, die entlang der Bicharakteristiken vorwärts laufen, am Rand ankommen werden. Der erste Fall führt auf Pseudodifferentialoperatoren, der zweite Fall auf Lösungsoperatoren; d.h. der Interpretationsunterschied, ob man dieselbe Charakteristik vorwärts oder rückwärts betrachtet, ergibt in der Anwendung zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren. Dies ist die anschauliche Bedeutung von Satz (5.6).

Zur Verdeutlichung:



(6.5) Bemerkung: Um Randbedingungen an einem Punkt in der Praxis verwenden zu können, müssen diese offenbar lokal sein, d.h. sie dürfen nicht Informationen von Punkten erfordern, die räumlich oder zeitlich beliebig weit von diesem Randpunkt entfernt sind. Bei der Randbedingung, die in Kapitel 8 hergeleitet wird, heißt dies, daß man nur über endlich viele Zeitschichten der Vergangenheit summieren kann, bei den Randbedingungen, die

durch einen Pseudodifferentialoperator gegeben sind, daß dieser durch einen "lokalen" Operator, zum Beispiel einen klassischen Differentialoperator approximiert werden muß. Dabei ist dann selbstverständlich darauf zu achten, daß das so erhaltene Anfangs/Randwertproblem sachgemäß ist. (Dies ist keine leere Forderung, wie ein Beispiel von Engquist und Majda (1977) zeigt).

7. Approximationen absorbierender Randbedingungen, die durch Pseudodifferentialoperatoren gegeben sind

In (5.10) wurde eine absorbierende Randbedingung für hyperbolische Systeme in zwei Raumvariablen hergeleitet. Diese absorbierende Randbedingung, von B. Engquist und A. Majda (1977) entwickelt, ist allerdings durch einen Pseudodifferentialoperator gegeben, also nichtlokal in Raum und Zeit. Damit ist die Randbedingung für eine direkte numerische Anwendung nicht geeignet.

Man kann nun versuchen, die Pseudodifferentialoperatoren in gewisser Weise durch partielle Differentialoperatoren zu approximieren und man erwartet, daß auf den Rand auftreffende Wellen wenigstens teilweise absorbiert werden.

Fragen, die mit diesem Themenkreis in Zusammenhang stehen, werden im folgenden Kapitel untersucht.

Um die prinzipiellen Ideen herauszuarbeiten beschäftigen wir uns mit absorbierenden Randbedingungen für die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen.

Entsprechende Überlegungen können dann auch für hyperbolische Systeme angestellt werden.

Eine absorbierende Randbedingung für die Wellengleichung -

Die Approximationen von Engquist und Majda

Das Ergebnis, das in (5.10) mit Hilfe des Faktorisierungssatzes (4.9) für Systeme erster Ordnung hergeleitet wurde, ist über einen analogen Satz von Nirenberg (1973) für Einzelgleichungen höherer Ordnung auf die Wellengleichung übertragbar.

Der Operator

$$(7.1) \quad L = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2$$

kann damit geschrieben werden als

$$(7.2) \quad L = (\partial_y + L_1)(\partial_y + L_2) ,$$

mit

$$(7.3) \quad L_k = (-1)^k \sqrt{\partial_t^2 - \partial_x^2} ,$$

wobei L_k als der Pseudodifferentialoperator zu interpretieren ist, dessen Symbol l_k durch

$$l_k(\tau, \xi) = i(-1)^k \sqrt{\tau^2 - \xi^2}$$

gegeben ist.

Betrachtet man die Wellengleichung im rechten Halbraum $y \geq 0$, so ist die Randbedingung, die ebene Wellen der Form

$$(7.4) \quad u(t, x, y) = \exp(i(\tau t + \xi x + \sqrt{\tau^2 - \xi^2} y)) : \tau^2 > \xi^2, \tau > 0,$$

absorbiert, gegeben durch

$$(7.5) \quad (\partial_y + L_1)u \Big|_{y=0} = 0 \quad .$$

Ist als Anfangswelle nicht nur eine ebene Welle der Form (7.4) gegeben, sondern eine Überlagerung von nach links laufenden Wellen

$$(7.6) \quad u_1(t, x, y) = \iint \exp(i(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} y + \xi x + \tau t)) \bar{u}_1(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

mit einer Amplitudenfunktion $\bar{u}_1$, die für große $|\tau| + |\xi|$ den Träger in $\tau^2 > \xi^2$ hat, so ist ersichtlich, daß die Randbedingung (7.5) auch hier keine nach rechts laufenden Wellen der Form

$$(7.7) \quad u_2(t, x, y) = \iint \exp(i(-\sqrt{\tau^2 - \xi^2} y + \xi x + \tau t)) \bar{u}_2(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

erzeugt, da die Welle in (7.6) der Randbedingung (7.5) genügt.

Bei der Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten in der Ebene kann die absorbierende Randbedingung aber auch ohne Faktorisierungsergebnisse für Pseudodifferentialoperatoren hergeleitet werden, da der Operator L_1 direkt über die Fouriertransformation definiert werden kann. Das bedeutet, daß die absorbierende Randbedingung in diesem Fall nicht nur asymptotisch für hohe Frequenzen gültig ist, wie aus der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren folgen würde.

Engquist und Majda haben nun vorgeschlagen, den Operator L_1 zu approximieren, indem man sein Symbol

$$(7.8) \quad l_1(\tau, \xi) = -i\tau\sqrt{1 - \xi^2/\tau^2}$$

durch eine Padé-Approximation bezüglich (ξ^2/τ^2) ersetzt.

Sie erhalten folgendes Ergebnis (1977) (1979):

(7.9) Satz: Gegeben sei die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen im Halbraum $y \geq 0$ zusammen mit Randbedingungen bei $y=0$, die aus (7.5) durch Taylor- oder Padé-Entwicklung von $\sqrt{1-z^2}$ um $z=0$ bis zur Ordnung n entstehen:

	Approximation von $\sqrt{1-z^2}$	Randbedingung
T1	$1 + O(z^2)$	$(\partial_y - \partial_t)u _{y=0} = 0$
T2	$1 - z^2/2 + O(z^4)$	$(\partial_y \partial_t - \partial_t^2 + \partial_x^2/2)u _{y=0} = 0$
T3	$1 - z^2/2 - z^4/8 + O(z^6)$	$(\partial_y \partial_t^3 - \partial_t^4 + 1/2 \partial_x^2 \partial_t^2 + 1/8 \partial_x^4)u _{y=0} = 0$
P1, P2	identisch mit T1, T2	
P_{N+1}	$1 - \frac{z^2}{P_N + 1} + O(z^{2N}) =$ $1 + T_{N+1}/S_{N+1} + O(z^{2N})$	vgl. Engquist-Majda (1979, p 320f)

Dann gilt: T1, T2 und alle P_N ergeben mit den Korrespondenzen $i\xi \leftrightarrow \partial_x$, $i\tau \leftrightarrow \partial_t$ Randbedingungen, die zusammen mit der Wellengleichung ein sachgemäßes Anfangs/Randwertproblem im Sinne von Kreiss darstellen.

Die Randbedingung nach T3 erzeugt ein nicht sachgemäßes Problem.

Sie beweisen auch die Konvergenzaussage, daß für genügend großes N die reflektierten Wellen beliebig klein werden (1979) und wenden die Methode, das Symbol des Pseudodifferentialoperators um $(\xi^2/\tau^2) = 0$ zu entwickeln, auch auf hyperbolische Systeme

wie die linearisierten Gleichungen der Gasdynamik oder geophysikalische Gleichungen an (vgl. (7.29)).

Wir versuchen nun, allgemeinere Approximationen zuzulassen und dadurch global bessere Absorptionseigenschaften der Randbedingungen zu erhalten.

Eine neue Klasse von Approximationen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer Beobachtung, die uns eine Interpretation der Randbedingungen von Engquist und Majda ermöglicht.

Für die Wellenpakete in (7.4) bzw. (7.6) gilt

$$(7.10) \quad \xi/\tau = \sin \varphi ,$$

wobei φ der Winkel zwischen der Welle und der Normalenrichtung zum Rand $y=0$ ist.

Die Taylor- bzw. Padé-Entwicklung um $\frac{\xi}{\tau}=0$ stellt also eine Entwicklung des Symbols des Pseudodifferentialoperators (7.8) (das vom Einfallswinkel abhängt) um den senkrechten Einfall $\varphi=0^\circ$ dar.

Mit zunehmendem Einfallswinkel werden die Absorptionseigenschaften der so gewonnenen Randbedingungen schlechter. Es gilt für die Randbedingungen, die von P1 und P2 erzeugt werden:

(7.11) Lemma: (Engquist-Majda (1977))

Die Randbedingungen

$$a) \quad (\partial_y - \partial_t) u|_{y=0} = 0$$

beziehungsweise

$$b) \left(\partial_y \partial_t - \partial_t^2 + \frac{1}{2} \partial_x^2 \right) u \Big|_{y=0} = 0$$

ergeben für Wellen der Form (7.4) reflektierte Wellen mit Amplitude

$$R(\varphi) = \frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi + 1}$$

bzw.

$$R(\varphi) = \left(\frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi + 1} \right)^2$$

Beweis: a) siehe Satz (7.12) mit $\gamma=0$, den Fall b) rechnet man analog nach.

Dies motiviert die Suche nach Randbedingungen, die bei gleicher Ordnung des Randdifferentialoperators bessere Absorptionseigenschaften für den gesamten Winkelbereich besitzen. Wesentlich dabei ist, daß man sachgemäße Probleme erhält; das Beispiel T3 zeigt, daß etwas Vorsicht angebracht ist.

Zur Einführung in das Folgende geben wir ein einfaches Ergebnis an, das sich teilweise als Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Resultates herausstellen wird.

(7.12) Satz: Es sei $0 \leq \gamma \leq 1$, $I := [-\gamma, \gamma]$.

Die Gerade $w=\alpha$ sei die beste Approximation an $w = \sqrt{1-z^2}$ in $L_2(I)$ (falls $\gamma>0$) oder $L_\infty(I)$ aus $\text{span}(1)$.

Die von diesen Approximationen (analog zu (7.9)) erzeugten Randbedingungen sind zusammen mit der Wellengleichung in $y \geq 0$ sachgemäß, die Amplitude der reflektierten ebenen Wellen¹⁾

(7.7) ist $R(\varphi) = (\cos \varphi - \alpha) / (\cos \varphi + \alpha)$, $\varphi = \arcsin(\xi/\tau)$.

1) Wir betrachten auslaufende Wellen der Amplitude $\bar{u}_1=1$, $R(\varphi)$ entspricht dann $\bar{u}_2(\tau, \xi)$.

Beweis: a) Sachgemäß: Wir zeigen, daß die Energie $E(t)$ abnimmt.

$$-u_t(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) = \frac{1}{2}\partial_t(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2) - \partial_x(u_t u_x) - \partial_y(u_t u_y) = 0$$

Mit $E(t) := \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2)$ folgt

$$\iint E(t=T) dx dy - \iint E(t=0) dx dy + \int_0^T \int (u_t u_y) (y=0) dx dt = 0 ,$$

wobei wir Funktionen u betrachten, die bei $t=0$ beschränkten Träger in x und y haben.

Man sieht leicht, daß $0 < \alpha \leq 1$ gilt. Damit erhält man die Randbedingungen

$$(\partial_y - \alpha \partial_t)u \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{mit } \alpha \in (0, 1] .$$

Dies ergibt

$$\iint E(t=T) dx dy + \alpha \int_0^T \int u_t^2 (y=0) dx dt = \iint E(t=0) dx dy$$

bzw.

$$\iint E(t=T) dx dy \leq \iint E(t=0) dx dy .$$

b) Die Reflexionskoeffizienten berechnen sich aus dem Ansatz

$$u(t, x, y) = \exp(i(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} y + \tau t + \xi x)) + R \exp(i(-\sqrt{\tau^2 - \xi^2} y + \tau t + \xi x))$$

und der Randbedingung $(\partial_y - \alpha \partial_t)u \Big|_{y=0} = 0 :$

$$(\partial_y - \alpha \partial_t)u \Big|_{y=0} = i(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} - R\sqrt{\tau^2 - \xi^2} - \alpha\tau - R\alpha\tau) \exp(i(\tau t + \xi x)) = 0$$

$$\Rightarrow (1-R)\sqrt{\tau^2 - \xi^2} = (1+R)\alpha\tau$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{1 - \xi^2/\tau^2} - \alpha}{\sqrt{1 - \xi^2/\tau^2} + \alpha} = \frac{\cos \varphi - \alpha}{\cos \varphi + \alpha} .$$

(7.13) Beispiele: 1) $\gamma=0$, α sei die beste Approximation in

$L_\infty(I) \Rightarrow \alpha=1$, man erhält als Spezialfall die Randbedingung T1

bzw. P1 von Engquist und Majda (vgl. (7.9)).

2) $\gamma=1$, α sei die beste Approximation in $L_\infty(I) \Rightarrow$

Man erhält die Randbedingung $(\partial_y - \frac{1}{2}\partial_t) u \Big|_{y=0} = 0$.

3) $\gamma=1$, α sei die beste Approximation in $L_2(I) \Rightarrow$

$\alpha = \pi/4$.

(7.14) Bemerkung: In der Praxis sind zwei Kriterien für die Beurteilung des Absorptionsverhaltens einer Randbedingung von Bedeutung: Die Amplitude der reflektierten Welle (genauer: der Betrag der Amplitude) und die Energie (dichte) der reflektierten Welle, die bei ebenen Wellen der Form (7.4) proportional zum Quadrat der Amplitude ist.

Um bei einem konkreten Problem entscheiden zu können, welcher Anteil der auf den Rand auftreffenden Amplituden oder der dort auftreffenden Energie reflektiert wird, muß die Verteilung der eintreffenden Amplituden oder der Energie auf die verschiedenen Winkel bekannt sein. Im allgemeinen wird man darüber keine Aussage machen können. In der Anwendung ist es meist sinnvoll anzunehmen, daß alle Winkel gleichmäßig auftreten. Unter dieser Annahme beweisen wir nun einige Aussagen über die Reflexionseigenschaften der Randbedingungen

$$(7.15) \quad (\partial_y - \alpha \partial_t) u \Big|_{y=0} = 0 \quad , \quad \alpha \in (0,1] \quad .$$

(Für $\alpha=0$ erhält man die Neumann-Bedingung. Diese ist energieerhaltend.)

(7.16) Lemma : Eine Stammfunktion zu $f(\varphi) = (\cos\varphi - \alpha)/(\cos\varphi + \alpha)$ ist für $0 < \alpha < 1$ gegeben durch

$$ST(\varphi) = \varphi - \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \ln \left[- \frac{\tan \varphi/2 + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}}{\tan \varphi/2 - \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}} \right] \quad .$$

Für $\alpha=1$ gilt

$$ST(\varphi) = \varphi - 2 \tan \varphi/2 .$$

Beweis: Differenzieren und Additionstheoreme.

(7.17) Satz: Die Dichtefunktion für die Verteilung der Einfallswinkel φ in (7.6) mit $\sin \varphi = \xi/\tau$ sei konstant in $[0, \pi/2]$, außerhalb dieses Intervalls sei sie 0.

Gegeben sei die Wellengleichung (7.1) in $y \geq 0$ zusammen mit der Randbedingung (7.15). Der Erwartungswert $EW(\alpha)$ des Betrags der Amplitude der reflektierten Welle besitzt ein Minimum bei $\alpha^* \in (\frac{1}{2}, 1)$. Insbesondere ist der Erwartungswert $EW(1)$ größer als $EW(\alpha^*)$, die Randbedingung P1 läßt also größere reflektierte Amplituden erwarten.

Beweis: Nach Satz (7.12) gilt (bis auf eine multiplikative Konstante, die wir weglassen)

$$EW(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\cos \varphi - \frac{\alpha}{\cos \varphi}}{\cos \varphi + \frac{\alpha}{\cos \varphi}} \right| d\varphi .$$

Wegen der Kompaktheit von $[1/2, 1]$ genügt es zu zeigen:

$$\exists \alpha_1 \in (1/2, 1) : EW(\alpha_1) < EW(1/2) \wedge EW(\alpha_1) < EW(1) ,$$

da $EW(\alpha)$ eine stetige Funktion von α ist. $EW(\alpha)$ ist zwar explizit bekannt (Lemma (7.16)), ist jedoch außer für geschickt gewählte Werte von α nur einer numerischen Auswertung zugänglich.

$$EW(1) = -ST(\varphi) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + 2 > 0.4$$

Berechnung von $EW(1/2)$:

$$EW(\frac{1}{2}) = 2 ST(\arccos(\frac{1}{2})) - ST(\frac{\pi}{2}) - ST(0)$$

$$\text{Mit } \alpha = \frac{1}{2}, \arccos(\alpha) = \frac{\pi}{3}, \tan(\arccos(\alpha)/2) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

folgt

$$ST(\arccos(\alpha)) = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} \ln \left[-\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{3} - \sqrt{3}} \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} \ln(2) >$$

$$> 1.046 - .667 \times 1.7321 \times .694 \geq 0.2442$$

$$ST(0) = 0$$

$$\begin{aligned} ST\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} \ln \left[-\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} \ln\left(\frac{1}{2}(4+2\sqrt{3})\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} \ln(2+\sqrt{3}) < 1.571 - .666 \times 1.7320 \times \ln(3.7320) \leq \\ &\leq .0656 \end{aligned}$$

$$\text{Damit: } EW\left(\frac{1}{2}\right) \geq .4228 \geq .4$$

Abschätzung von $EW\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$:

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \arccos(\alpha) = \frac{\pi}{4}, \quad \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = \sqrt{2} + 1, \quad \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

$$ST(\arccos(\alpha)) = \frac{\pi}{4} - 2 \ln \left[-\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1} \right] = \frac{\pi}{4} - 2 \ln(\sqrt{2})$$

$$ST\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 \ln \left[-\frac{1+\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}-1} \right] = \frac{\pi}{2} - 2 \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow EW\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) &= 2 \ln(1+\sqrt{2}) - 4 \ln\sqrt{2} = \\ &= -\ln(4/(3+2\sqrt{2})) = \ln((3+2\sqrt{2})/4) \leq .38 \end{aligned}$$

(7.18) Bemerkung: Die numerische Auswertung der Stammfunktion

zu $\int_0^a |(\cos\varphi - \alpha)/(\cos\varphi + \alpha)| d\varphi$ ergibt, daß die Bestimmung des

optimalen α^* für $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ und festes $\frac{\pi}{2} \geq a \geq 0$ sich am Rechner leicht durchführen läßt.

So erhält man $\alpha^* \approx .765$, wenn man annimmt, daß φ in $[0, \frac{\pi}{2}]$

gleichverteilt ist und sonst die Dichtefunktion 0 hat. Ist φ in $[0, \frac{\pi}{4}]$ gleichverteilt, so erhält man $\alpha_2^* \approx .924$.

Damit ergeben sich (ebenfalls numerisch) folgende Erwartungswerte:

Im ersten Fall : $EW(\alpha_1^*) \approx .373$, $EW(1) \approx .429$

Im zweiten Fall : $EW(\alpha_2^*) \approx .033$, $EW(1) \approx .043$.

Auch die Absorption der Energie wird verbessert, wie das nächste Ergebnis zeigt.

(7.19) Satz: Es gelten die Voraussetzungen von Satz (7.17). Dann gilt für den Erwartungswert $EW_2(\alpha)$ des Quadrats der Amplitude der reflektierten Welle:

$$\exists \varepsilon > 0 : EW_2(1 - \varepsilon) < EW_2(1) .$$

Beweis:

$EW_2(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi - \alpha)^2 / (\cos\varphi + \alpha)^2 d\varphi$ (wieder bis auf einen positiven konstanten Faktor). Es genügt zu zeigen

$$\frac{d}{d\alpha} EW_2(\alpha) \Big|_{\alpha=1} > 0 .$$

$$\frac{d}{d\alpha} EW_2(\alpha) = \int_0^{\pi/2} ((-4)(\cos\varphi - \alpha)\cos\varphi) / (\cos\varphi + \alpha)^3 d\varphi$$

Der Integrand ist für $\alpha=1$ im Integrationsintervall immer positiv, damit folgt die Behauptung.

Bemerkung: Eine numerische Auswertung des Integrals ergibt ein Minimum von $EW_2(\alpha)$ bei $\alpha^* \approx .61$, $EW_2(\alpha^*) \approx .17$, $EW_2(1) \approx .24$. Ist φ nur in $[0, \frac{\pi}{4}]$ gleichverteilt und verschwindet die Dichtefunktion sonst, so erhält man $\bar{\alpha}^* \approx .90$, $\overline{EW_2}(\bar{\alpha}^*) \approx .002$, $\overline{EW_2}(1) \approx .004$. Gegenüber $\alpha=1$ erhält man also eine deutliche

Verbesserung.

Die numerischen Ergebnisse bei der Anwendung dieser Randbedingungen auf ein konkretes Problem zeigen, daß man dort tatsächlich eine Verminderung der reflektierten Energie um ca. 10% erhält, wenn statt $\alpha=1$ α als .9 gewählt wird (vgl. Kapitel 10a).

Auf eine weitere Behandlung dieser Frage wollen wir jedoch verzichten, stattdessen beschäftigen wir uns noch mit höheren Approximationen. Das Problem dabei ist nicht, bessere Approximationen an das Symbol des Pseudodifferentialoperators zu finden, sondern nachzuweisen, daß man sachgemäße Anfangs/Randwertprobleme erhält.

Die einfache Energieabschätzung, die beim Beweis von (7.12) verwendet wurde, ist nicht mehr anwendbar. Wir zitieren das Hauptergebnis von Kreiss (1970), wie es in Engquist-Majda (1977) für die Wellengleichung spezialisiert wurde.

(7.20) Satz: Ein Anfangs/Randwertproblem für die Wellengleichung in $y \geq 0$ mit variablen Koeffizienten ist sachgemäß, wenn es keine nichtkonstante Lösung der Form

$$w(s, \xi) = \exp(-\sqrt{s^2 + \xi^2} y + st + i\xi x) \quad , \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad ,$$

für die Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten, die sich durch Auswertung der Koeffizientenfunktionen an einem Randpunkt ergeben, gibt, so daß mit dem Randoperator B

$$Bw(s, \xi) \Big|_{y=0} = 0$$

gilt..

Für $|s|^2 + |\xi|^2 = 1$ und $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ muß weiter

$$|Bw(s, \xi)| \geq c_0 > 0$$

erfüllt sein.

Wir versuchen nun, die Approximation P_N an $\sqrt{1-z^2}$, die in (7.9) angegeben wurde, durch eine Approximation zu ersetzen, die nicht auf eine möglichst gute Übereinstimmung im Nullpunkt $z=0$ sondern wieder auf gute Übereinstimmung in $[-\gamma, \gamma]$ zugeschnitten ist.

(7.21) Satz: Es sei

$$B_N(i\tau, i\xi, \partial_y) := (i\tau)^{N-1} S_N\left(\frac{i\xi}{i\tau}\right) \partial_y - \alpha(i\tau)^N S_N\left(\frac{i\xi}{i\tau}\right) - \beta(i\tau)^N T_N\left(\frac{i\xi}{i\tau}\right)$$

mit

$$\bar{P}_1(x) = 1, \quad \bar{P}_{N+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + \bar{P}_N(x)} =: 1 + \frac{T_{N+1}(x)}{S_{N+1}(x)},$$

$$P_{N+1}(x) := \alpha + \beta \frac{T_{N+1}(x)}{S_{N+1}(x)}.$$

Definiert man $B_N(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$, indem man $i\tau$ durch ∂_t und $i\xi$ durch ∂_x ersetzt, so gilt:

- B_N ist ein Polynom in $(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ vom Höchstgrad N .
- Das Problem $(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2)u =: \square u = 0$ in $y \geq 0$, $B_N u \Big|_{y=0} = 0$, ist sachgemäß im Sinne von Kreiss, wenn folgende Einschränkungen für α, β gefordert werden:
 $\alpha, \beta > 0$, $P_{N+1}(x) > 0$ für alle $0 \leq x \leq 1$.

(7.22) Bemerkung: Der Beweis verläuft analog zu jenem in Engquist-Majda (1979), wo die Behauptung für $\alpha=\beta=1$ bewiesen wurde. Die Bedeutung des obigen Satzes liegt darin, daß über die beiden freien Parameter α, β versucht werden kann, die Kurve $\sqrt{1-z^2}$ wieder global besser zu approximieren.

Zum Beweis:

Wir geben nur jene Punkte an, die vom Beweis in Engquist-Majda

(1977) etwas verschieden sind. Die Eigenschaften von T_{N+1} , S_{N+1} , die in der genannten Arbeit unter (1.9) und (1.10) aufgeführt sind, sind unverändert gültig, die dortige Gleichung (1.11) wird durch obige Definition von B_N ersetzt. Folgende Notationsunterschiede bestehen:

Engquist-Majda	y	x	$x \leq a$	$x > 0$	ω	ξ
Hier	x	y	$y \geq 0$	$y < 0$	ξ	τ

Für $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ lassen sich dann Proposition 1.1 und die Aussage, daß B_N ein schwach sachgemäßer Evolutionsoperator in $y < 0$ ist, mit einigen geringfügigen Änderungen herleiten.

Deshalb muß die Aussage in Satz (7.20) nur noch für s mit $\operatorname{Re}(s) = 0$ nachgewiesen werden.

Es sei $s = i\tau$ mit $|\tau|^2 + |\xi|^2 = 1$. Zu zeigen ist

$$|-(i\tau)^N S_N\left(\frac{i\xi}{1\tau}\right) \sqrt{1-\xi^2/\tau^2} - (i\tau)^N (\alpha S_N\left(\frac{i\xi}{1\tau}\right) + \beta T_N\left(\frac{i\xi}{1\tau}\right))| \neq 0.$$

Fall 1: $\tau \neq 0$

Damit reduziert sich diese Bedingung zu

$$|\sqrt{1-\xi^2/\tau^2} + P_N\left(\frac{i\xi}{1\tau}\right)| > 0.$$

Fall 1a: $\xi^2/\tau^2 \geq 1$

$\sqrt{1-\xi^2/\tau^2}$ ist imaginär und 0 bei $\xi^2 = \tau^2$,

P_N ist reell und $P_N(1) \neq 0$.

Fall 1b: $\xi^2/\tau^2 < 1$

$\sqrt{1-\xi^2/\tau^2} > 0$ und $P_N > 0$, da α, β geeignet gewählt.

Fall 2: $\tau = 0$: wie in Engquist-Majda(1977).

(7.23) Bemerkung: Ein Teil der Aussage von (7.12) folgt aus diesem allgemeinen Resultat, jedoch ist der dortige

Beweisgang interessant für die Untersuchung der Sachgemäßheit der dortigen Randbedingungen für Gebiete mit Ecken.

(7.24) Korollar: Es sei $f(z)$ die beste Approximation aus $\text{span}(1, z^2)$ an $\sqrt{1-z^2}$ in $L_2(-1, 1)$. Dann ist die aus $f(z)$ sich ergebende Randbedingung zusammen mit der Gleichung $u = 0$ sachgemäß in $y \geq 0$.

Beweis: Berechnung der besten Approximation $f(z) = c_1 + c_2 z^2$.

Es sei $(\cdot, \cdot)$ das L_2 -Skalarprodukt. Damit:

$$(1, 1) = 2, \quad (1, z^2) = 2/3, \quad (z^2, z^2) = 2/5,$$

$$(\sqrt{1-z^2}, 1) = \pi/2, \quad (\sqrt{1-z^2}, z^2) = \pi/8.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2/5 \end{bmatrix} \underline{c} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/8 \end{bmatrix} \pi$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2/3 \\ 0 & 8/15 \end{bmatrix} \underline{c} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/8 \end{bmatrix} \pi$$

$$\Rightarrow \text{Beste Approximation } f(z) = \frac{21}{64}\pi - \frac{15}{64}\pi z^2 \approx 1.03 - .74z^2.$$

Dieses $f(z)$ kann als "verallgemeinerte" Padé-Approximation

P_{N+1} nach Satz (7.21) aufgefaßt werden, $f(z) = P_2(z)$ mit

$\alpha = \frac{21}{64}\pi$, $\beta = \frac{15}{64}\pi$; es gilt $f(z) > 0$ in $0 \leq z \leq 1$, damit folgt die Aussage.

(7.25) Bemerkung: Es ist numerisch sehr einfach, bei einer gegebenen Verteilung der Einfallswinkel die Parameter so zu bestimmen, daß der Erwartungswert des Betrages der reflektierten Amplitude minimal wird. Analoge Aussagen zu Satz (7.17) sind zu erwarten, jedoch scheint eine explizite Auswertung der auftretenden Integrale im allgemeinen nicht möglich.

(7.26) Beispiel: Als Randbedingung sei gegeben

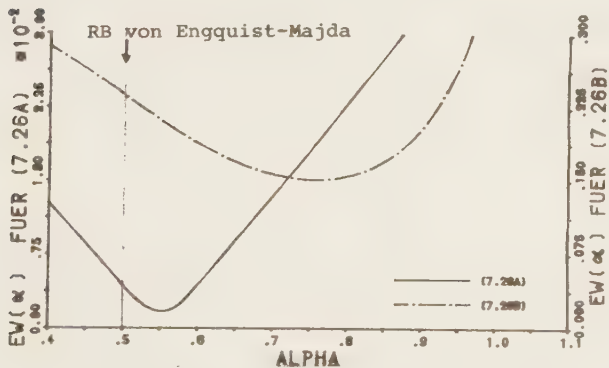
$$(\partial_y \partial_t - \partial_t^2 + \alpha \partial_x^2) u \Big|_{y=0} = 0 .$$

In der folgenden Zeichnung ist der numerisch berechnete Erwartungswert des Betrages der reflektierten Amplitude dargestellt für

- a) φ in $[0, \frac{\pi}{4}]$ gleichverteilt, sonst Dichtefunktion 0 ,
- b) φ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ gleichverteilt, sonst Dichtefunktion 0 .

$R(\varphi)$ ergibt sich bei dieser Randbedingung zu

$$R(\varphi) = - \frac{(\cos\varphi - a)^2 - (1-a)^2}{(\cos\varphi + a)^2 - (1-a)^2} , \quad a = \frac{1}{2\alpha} .$$



Für diese Randbedingungen gilt

(7.27) Satz: Es sei $V(\cdot) \in C[0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\int_0^{\pi/2} V(\varphi) d\varphi = 1$

eine Dichtefunktion für die Winkel in (7.6). Gegeben sei $\alpha u = 0$ in $y \geq 0$ zusammen mit der Randbedingung

$$(\partial_y \partial_t - \partial_t^2 + \alpha \partial_x^2) u \Big|_{y=0} = 0 .$$

Dann gilt:

Der Erwartungswert des reflektierten Amplitudenbetrages nimmt ab, wenn φ von $\frac{1}{2}$ ab vergrößert wird, genauer:

$\exists \varepsilon > 0 : EW(\frac{1}{2} + \varepsilon) < EW(\frac{1}{2})$.

(Der Fall $\mu = \frac{1}{2}$ entspricht der Randbedingung P2 von Engquist und Majda).

Beweis: Ebenso wie der Beweis von (7.19) .

(7.28) Bemerkung: a) Die Verallgemeinerung auf nichtstetige V ist offensichtlich.

b) Reynolds (1978) gelangte über heuristische Überlegungen zu denselben Randbedingungen.

c) Gebauer (1981) ermittelte numerisch $R(\varphi; a)$ für eine Differenzenapproximation an diese Randbedingungen.

(7.29) Bemerkung: An dieser Stelle sei noch ein kurzer Hinweis darauf eingefügt, wie sich dieses allgemeinere Approximationsverfahren auf Systeme erster Ordnung übertragen läßt.

In (5.10) haben wir die Methode von Engquist und Majda angegeben, theoretisch absorbierende Randbedingungen für hyperbolische Systeme herzuleiten. Dazu wird eine "Diagonalisierung" des Systems mit Hilfe eines Pseudodifferentialoperators mit Symbol $v(x, y, \tau, \xi)$ durchgeführt.

In der Arbeit von Engquist und Majda wird $v(\tau, \xi)$ (zur Notationsvereinfachung nehmen wir nun konstante Koeffizienten an) bzw. die Darstellung als asymptotische Summe gliedweise nach Taylor um $\xi=0$ entwickelt (vgl. (1977, p 639f)):

$$v(\tau, \xi) \sim v_0(\tau, \xi) + \tau^{-1} v_{-1}(\tau, \xi) + \tau^{-2} v_{-2}(\tau, \xi) \dots$$

und

$$v_{-j}(\tau, \xi) = v_{-j}(1, \frac{\xi}{\tau}) = v_{-j}(1, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(\frac{\xi}{\tau})^k}{\tau} v_{-j}^{(k)}(1, 0) + O(|\frac{\xi}{\tau}|^{1+1}) ,$$

was einer Approximation bei senkrechtem Welleneinfall entspricht.

An dieser Stelle des Verfahrens kann nun die oben beschriebene Verbesserung angewandt werden: Statt Taylorentwicklung kann wieder eine Approximation gewählt werden, die, über den gesamten Winkelbereich gesehen, besser ist.

Engquist und Majda (1977) geben als Beispiel die Gleichungen der Gasdynamik an. Mit diesen beschäftigen wir uns im Abschnitt über die numerische Realisierung des Verfahrens, wo eine numerische Approximation des Pseudodifferentialoperators durchgeführt wird. Hier sei als Beispiel nochmals die Wellengleichung, nun allerdings als hyperbolisches System geschrieben, angegeben.

(7.30) Beispiel:

$$\partial_t u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x u + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \partial_y u, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

⇒ $\partial_y u = Mu$, wobei der Differentialoperator M das Symbol

$$m(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} -\tau & -\xi \\ \xi & \tau \end{bmatrix} \text{ hat.}$$

Die Matrix der Eigenvektoren zu m liefert das Symbol des Pseudodifferentialoperators, der die Diagonalisierung des Systems leistet.

$$v(1, \frac{\xi}{\tau}) = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{\tau} & -\frac{\xi}{\tau} \\ \frac{1}{1+\sqrt{1-\xi^2/\tau^2}} & \frac{1}{1-\sqrt{1-\xi^2/\tau^2}} \end{bmatrix}$$

(In der vorangegangenen Theorie: $v_0=v$, $v_{-1}=v_{-2}=\dots=0$)

Die Approximation kann nun wie im skalaren Fall durchgeführt werden.

(7.31) Bemerkung: Berechnet man den transformierenden Pseudodifferentialoperator nur an diskreten Punkten $\xi_j/1_j$ (eventuell numerisch) und führt dann eine diskrete L_2 -Approximation durch, so ist die Theorie dieses Abschnittes übertragbar. Daß dieses Vorgehen ein sehr gutes Verfahren zur Berechnung nichtreflektierender Randbedingungen liefert, zeigen die Ergebnisse in Kapitel 10.

8. Lösungsoperatoren für Differenzenapproximationen hyperbolischer Systeme

In Kapitel 5 wurde eine absorbierende Randbedingung mit Hilfe eines Lösungsoperators (Fourierintegraloperators) hergeleitet. Als diskretes Analogon zu dieser Methode ist das Verfahren von Trautenberg (1980a) aufzufassen, das mittels einer "Propagationsmatrix" - also eines Lösungsoperators der diskreten Gleichung - die vorzuschreibenden Werte der Lösung am künstlichen Rand $y=0 \cdot \Delta y$ aus der Kenntnis der Lösung auf der Hyperebene $y=1 \cdot \Delta y$ an allen vergangenen Zeitpunkten erschließt.

Das Verfahren war jedoch nur für den Spezialfall der üblichen 7-Punkt-Diskretisierung der Wellengleichung in zwei Raumdimensionen hergeleitet worden.

Wir zeigen nun konstruktiv, daß dieses Konzept der Propagationsmatrix auf allgemeine (explizite) Differenzenapproximationen hyperbolischer Differentialgleichungssysteme übertragbar ist.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(8.1) \quad u_t = Au_y, \quad u(t,y) \in \mathbb{R}^k, \quad A \in \mathbb{R}^{k,k},$$

wobei wir uns zur Vereinfachung der Schreibarbeit auf eine Raumvariable beschränken.

Damit konsistent sei das stabile Differenzenschema

$$(8.2) \quad u_j^{n+1} = \sum_{i=-1}^1 Q_i u_{j+i}^n.$$

Dabei bezeichne n die Zeitdiskretisierung, j die Raumdiskretisierung.

(8.3) Satz: Gegeben sei das Differenzenschema (8.2) in

$\{m\Delta y / m \in \mathbb{Z}\}$ mit Anfangswerten für $n=0$.

Es gelte $u_j^0 = 0$ für $j \leq 1$.

Dann gibt es einen rekursiv berechenbaren Operator $E(n,m) \in \mathbb{R}^{k,k}$, so daß die Randbedingung

$$(8.4) \quad u_0^n = \sum_{1 \leq n' \leq n} E(n',0) u_1^{n-n'}$$

numerisch absorbiert (im Sinne von Definition (6.1)) und die Lösung im Halbraum dort gegen die unbeschränkte Lösung¹⁾ von (8.1) konvergiert.

(8.5) Bemerkung: a) In einer echten numerischen Anwendung ist die Summe über n' ($1 \leq n' \leq n$) meist durch $1 \leq n' \leq n_0$, $n_0 < n$, zu ersetzen. Dies ist dann natürlich nur eine Approximation der Randbedingung.

b) Die Übertragung auf Mehrschrittverfahren ist möglich, scheint jedoch in der Praxis nicht sinnvoll zu sein (vgl. Kapitel 10).

1) "unbeschränkt" bezeichnet in diesem Abschnitt die Lösung bzw. das Schema im unbeschränkten Gebiet.

Zum Beweis von (8.3):

Es sei $E(n,m)$ eine (Matrix-) Lösung des Differenzenschemas in $\{r \times \Delta y / r \leq 1\}$ mit Anfangs- und Randwerten

$$\begin{aligned} E(0,m) &= \delta_{m,1} \times I, \quad I = \text{Einheitsmatrix im } \mathbb{R}^{k,k}, \\ E(n,1) &= 0, \quad 0 = \text{Nullmatrix, für } n > 0. \end{aligned}$$

Dann gilt offenbar, daß

$$u_j^n = \sum_{1 \leq n' \leq n} E(n',j) u_1^{n-n'}$$

eine Lösung des Differenzenschemas in $\{r \times \Delta y / r \leq 0\}$ ist, die auf der Linie $1 \times \Delta y$ mit der unbeschränkten Lösung übereinstimmt. Da die Koeffizienten des Schemas in $\{r \times \Delta y / r \leq 0\}$ konstant sind, gilt

$$u_{j+j'}^n = \sum_{1 \leq n' \leq n} E(n',j) u_{j'+1}^{n-n'} \quad (j' < 0).$$

Da E selbst eine Lösung des Schemas ist, gilt insbesondere

$$E(n, j+j') = \sum_{1 \leq n' \leq n} E(n',j) E(n-n', j'+1).$$

Für $j=0$, $j'=-1$ erhalten wir

$$E(n,-1) = \sum_{1 \leq n' \leq n} E(n',0) E(n-n',0).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in das Differenzenschema (8.2) ein, so ergibt das für $j=0$:

$$E(n+1) = Q_1 E(n,1) + Q_0 E(n,0) + Q_{-1} \left(\sum_{1 \leq n' \leq n} E(n',0) E(n-n',0) \right),$$

Damit ist $E(n+1,0)$ rekursiv für alle n bestimmt.

Die Randbedingung (8.4) liefert dieselben Werte auf der Linie $y=0 \times \Delta y$ wie das unbeschränkte Schema (8.2).

Die Lax-Richtmyer-Theorie (Richtmyer-Morton (1967)) liefert Konvergenz

(8.6) Bemerkung: Trautenberg (1980a) wandte für eine konkrete Differenzenapproximation der Wellengleichung dieselbe Konstruktion

tion an. Die Erweiterung hier beruht auf der Erkenntnis, daß die Konstruktion des Lösungsoperators E nicht für jede spezielle Differentialgleichung einzeln durchgeführt werden muß und daß auch Systeme ebenso behandelt werden können.

Wir geben nun ein für die Anwendung relevantes Differenzenschema für hyperbolische Systeme erster Ordnung und den zugehörigen Lösungsoperator an.

(8.7) Beispiel: Gegeben sei das strikt hyperbolische System in zwei Raumvariablen

$$(8.7a) \quad u_t = A u_y + B u_x, \quad A, B \in \mathbb{R}^{k,k},$$

das mit dem üblichen Lax-Wendroff-Schema integriert werden soll:

$$(8.7b) \quad \lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$\begin{aligned} u_{1,j}^{n+1} = & u_{1,j}^n + \frac{\lambda}{2} B (u_{1+1,j}^n - u_{1-1,j}^n) + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} B^2 (u_{1+1,j}^n - 2u_{1,j}^n + u_{1-1,j}^n) + \\ & + \frac{\lambda}{2} A (u_{1,j+1}^n - u_{1,j-1}^n) + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} A^2 (u_{1,j+1}^n - 2u_{1,j}^n + u_{1,j-1}^n). \end{aligned}$$

Wegen der zweiten Raumrichtung erhält man statt (8.4) die Randbedingung

$$(8.7c) \quad u_{1,0}^n = \sum_{1 \leq n' \leq n} \sum_{1' \in \mathbb{Z}} E(n', 0, 1-1') u_{1',1}^{n-n'}.$$

Die Summationen im Beweis von (8.3) sind durch Doppelsummationen zu ersetzen und es sind einige weitere offensichtliche Verallgemeinerungen durchzuführen.

Damit erhält man

$$(8.7d) \quad E(0,0,1) = 0$$

$$E(1,0,1) = \left(\frac{\lambda}{2} A + \frac{\lambda^2}{2} A^2 \right) \delta_{1,0},$$

$$E(2,0,1) = E(1,0,1) + \sum_{n'=1}^2 A \left(- \frac{1}{n'} \right) E(n',0,1-1')$$

$$E(n-n',0,1') + \text{weitere Terme} .$$

Die rekursive Berechnung von E kann bei Kenntnis von A, B vom Rechner übernommen werden. Bei der Summation über l' treten nur endlich viele Summanden auf.

(8.8) Bemerkung: Wilson (1982) gab kürzlich für das Lax-Wendroff Schema eine analoge Randbedingung an. Die Berechnung der Matrizen E erfolgt dort jedoch über die diskrete Laplace-Transformation. Dieses Verfahren scheint für praktische Zwecke weniger geeignet als obige Rekursionsvorschrift, die zudem auf der zugrundeliegenden Idee des Lösungsoperators aufbaut.

TEIL IV : NUMERISCHE SIMULATION VON WELLEN-AUSBREITUNGS- VORGÄNGEN

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit konkreten Problemen, zu deren Lösung die vorangegangenen Überlegungen verwendet werden.

In den Naturwissenschaften steht man häufig vor der Situation, einen Vorgang in einem sehr großen, möglicherweise unbeschränkten Gebiet simulieren zu müssen. Beschränkter Speicherplatz, Rechenzeitprobleme und die Notwendigkeit eine gewisse Rechengenauigkeit einhalten zu müssen, zwingen zur Rechnung in einem Teilgebiet.

Derartige Probleme treten z.B. in der Meteorologie (Elvius-Sundström (1973)), in der Geologie (Clayton-Engquist (1977)) und in der Strömungsmechanik (Bayliss-Turkel (1980)) auf.

Auf dem Rand des Teilgebietes sind Randbedingungen zu stellen, um ein sachgemäß gestelltes Anfangs/Randwertproblem zu erhalten. Die Randbedingungen sind so zu wählen, daß die Lösung des Problems im Teilgebiet die Lösung des ursprünglichen Problems dort approximiert.

Ein anschauliches physikalisches Prinzip, das sich unter bestimmten Voraussetzungen auch mathematisch rechtfertigen läßt (Gustafsson-Kreiss (1979)), fordert, daß aus dem Teilgebiet auslaufende Wellen an den (künstlichen) Rändern nicht reflektiert werden.

Wir haben uns in dieser Arbeit zuerst damit beschäftigt, exakte nichtreflektierende (absorbierende) Randbedingungen zu

finden. Diese waren durch einen Pseudodifferentialoperator oder einen Fourierintegraloperator gegeben und somit einer numerischen Anwendung nicht unmittelbar zugänglich.

In einem weiteren Abschnitt haben wir deshalb Approximationen an den entsprechenden Pseudodifferentialoperator hergeleitet, die sachgemäße Probleme erzeugen. Als Analogon zum Fourierintegraloperator, der Lösungsoperator der Differentialgleichung ist, fanden wir einen Lösungsoperator für hyperbolische Differenzenschemata.

Es ist noch die numerische Brauchbarkeit der in den Kapiteln 7 und 8 vorgeschlagenen Verfahren nachzuweisen. Als Beispiele werden die zweidimensionale Wellengleichung und die Gleichungen der Gasdynamik in der speziellen Form der linearisierten shallow water equations (Courant-Friedrichs (1948)) gewählt. Bevor wir uns mit den bei diesen Beispielen erhaltenen Ergebnissen beschäftigen, scheint es sinnvoll, einen Überblick über die in der Literatur vorgeschlagenen Verfahren zu geben.

9. Literaturübersicht zur praktischen Anwendung absorbieren-

der Randbedingungen

Der vermutlich erste Hinweis auf die Bedeutung der in dieser Arbeit untersuchten Problematik findet sich in einem Artikel von Lysmer und Kuhlemeyer (1969), die eine "dissipative Zone" empfehlen. Roache schlägt in seinem Buch "Computational Fluid Dynamics" (1972) für Strömungsrechnungen "upwind differencing", also Extrapolation, vor.

Elvius und Sundström (1973) sahen sich in der Meteorologie einer etwas anders gelagerten Fragestellung gegenüber:

Aus Vorlaufrechnungen sind die Randdaten mehr oder minder genau bekannt, die Frage ist nun, wieviele dieser Randdaten man am geschicktesten vorschreibt.

Chu und Sereny (1974) beschäftigen sich mit einer mehr numerischen Fragestellung: Sie führen Testrechnungen für den Fall durch, daß die diskretisierten Gleichungen mehr Randbedingungen benötigen als das Differentialgleichungssystem.

Im selben Jahr schlägt Smith (1974) das erste systematische Verfahren zur Unterdrückung unerwünschter Randreflexionen vor: Rechnet man ein lineares Problem in einem Halbraum einmal mit Neumann- und einmal mit Dirichlet-Randbedingungen und addiert die beiden Lösungen, so hat man Reflexionsfreiheit. Um allerdings N-fache Reflexionen zu unterdrücken, sind 2^N Lösungen zu überlagern; bei dreidimensionalen Gebieten also sinnvollerweise acht oder mehr Lösungen. Damit ist das Verfahren aus Rechenzeitgründen nicht brauchbar.

Lindman (1975) approximiert die Dispersionsrelation des Differenzschemas und gibt mit Hilfe geeigneter Projektionsoperatoren Randbedingungen an, die als Vorläufer der Randbedingungen aus der Theorie von Engquist und Majda (1977) gelten können; die Approximation der Dispersionsrelation erfolgt numerisch.

Der entscheidende Fortschritt auf dem Gebiet der absorbierenden Randbedingungen war die Erkenntnis von Engquist und Majda (1977), daß mit Hilfe der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren die Lösung in einlaufende und auslaufende Anteile aufgespalten werden kann. Der Projektionsoperator, der für die

einlaufenden Anteile die Null vorschreibt, ist dann eine geeignete Randbedingung (vgl. Kap. 5). Für die Approximation des Pseudodifferentialoperators schlagen sie Taylorentwicklung bzw. Padé-Approximation vor und beweisen die Stabilität der so erhaltenen Hierarchie von RB (1977) (1979). Diese Theorie ist auf allgemeine hyperbolische Systeme anwendbar, z.B. die elastische Wellengleichung (Clayton-Engquist (1977)).

Die späteren Arbeiten in Stichworten:

Grosch und Orszag (1977) zeigen, daß Koordinatentransformationen (Reduktion des unbeschränkten Gebietes auf ein beschränktes Gebiet) für hyperbolische Gleichungen keine Ergebnisverbesserung bringen, da numerisch Reflexion auftritt, wenn die (untransformierten) Diskretisierungspunkte zu weit voneinander entfernt liegen.

Reynolds (1978) gibt eine heuristische Faktorisierung des Wellenoperators an. Offenbar war ihm die Arbeit von Engquist-Majda nicht bekannt. Aus Stabilitätsgründen führt er einen freien Parameter p ein und erhält die Randbedingung aus (7.26).

Gustafsson und Kreiss (1979) untersuchen die Konvergenz der Lösung im Teilgebiet gegen die Lösung im Gesamtgebiet und geben eine Randbedingung an, wenn eine asymptotische Entwicklung der Koeffizienten der Gleichung bekannt ist.

Im selben Jahr publiziert Hedstrom (1979) ein Ergebnis bei nichtlinearen Problemen, dort sind aber bisher nur Aussagen bei einer Raumdimension möglich, da die Faktorisierungsergebnisse der Pseudodifferentialoperatortheorie nicht mehr anwendbar sind und qualitativ neue Effekte auftreten.

Bayliss-Turkel (1980): Randbedingungen bei Kenntnis einer asymptotischen Entwicklung der Lösung.

Rudy-Strickwerda (1980): Untersuchungen, wie durch geeignete

Wahl der Randbedingungen der steady state Zustand gut erreicht werden kann.

Trautenberg (1980a)(1980b), Trautenberg-Gebauer-Sachs (1982), Gebauer (1981) beschäftigten sich mit der Gewinnung von Randbedingungen über Propagationsmatrizen; ein Ansatz, der in Kapitel 8 so verallgemeinert wurde, daß nicht nur die Wellengleichung, sondern allgemeine hyperbolische Systeme behandelbar sind (vgl. auch Wilson (1982)).

Israeli-Orszag (1981) schlagen die Kombination von dissipativer Zone am Rand mit Randbedingungen nach Engquist und Majda vor.

10. Zur Implementierung der Verfahren aus den Kapiteln 7 und 8

In diesem Kapitel werden durchgeführte Testrechnungen besprochen, um die numerische Brauchbarkeit der Verfahren zu demonstrieren.

Als erstes Demonstrationsbeispiel wählen wir die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen, als zweites Beispiel ein hyperbolisches System erster Ordnung, das der meteorologischen Anwendung nahesteht, die Gleichungen der Flachwasserwellen in linearisierter Form (vgl. auch Sundström (1977)).

Bevor wir uns mit den Einzelheiten dieser Beispiele beschäftigen, fassen wir kurz die wesentlichen Resultate zusammen:

1) Die Klasse von Approximationen, die im zweiten Teil von Kapitel 7 vorgeschlagen wird, reflektiert insgesamt weniger Energie als die Approximationen von Engquist und Majda; bei den shallow water equations ist die neue Bedingung erster Ordnung sogar der alten Bedingung zweiter Ordnung überlegen.

2) Durch eine numerische Approximation des Symbols des Pseudodifferentialoperators kann das Erstellen der Randbedingungen automatisiert werden; dies ist ein wesentlicher Vorteil, wenn man Randbedingungen bei komplizierten Problemen zu berechnen hat.

3) Bei Rechnungen mit Randbedingungen höherer Ordnung (d.h. es sind Differentialgleichungen für die (eventuell transformierten) Variablen am Rand gegeben) ist ein gelegentlicher Schritt erster Ordnung als Restart günstig.

4) Das Verfahren der Propagationsmatrizen (Kap. 8) ist aufgrund seines hohen Rechenzeit- und Speicherplatzbedarfs deutlich unterlegen. Ein Vorteil liegt jedoch darin, daß das Absorptionsverhalten ohne weiteren Programmieraufwand durch Berücksichtigung von mehr Zeitschichten gesteuert werden kann. Bei der Wellengleichung ist das Verfahren damit bei hohen Genauigkeitsanforderungen konkurrenzfähig (vgl. Gebauer (1981)).

5) Eine algorithmisch begründete modifizierte Behandlung der Ecken des Gebiets beim Verfahren der Propagationsmatrizen wird vorgeschlagen. Die (beispielabhängige) Verminderung der reflektierten Energie ist erheblich.

Die zweidimensionale Wellengleichung

Die Gleichung

$$(10.1) \quad u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

wird auf einem Gitter mit N_x/N_y Punkten in x/y -Richtung durch

den üblichen 7-Punkt-Stern approximiert. (In den konkreten Rechenläufen: $NX = 52$, $NY = 32$.)

Als Anfangswert von u wird eine gaußglockenförmige Welle

$$u(0, I, J) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sqrt{(NX/3-I)^2 + (NY/2-J)^2} \geq 8 \\ \exp(1/(\sqrt{(NX/3-I)^2 + (NY/2-J)^2}^2 \cdot \frac{1}{64} - 1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

vorgegeben, u_t wird auf 0 gesetzt.

An den Randpunkten werden verschiedene Bedingungen gestellt.

Wir beschreiben die Bedingungen für den Rand $y=0$ ($J=0$), die Vorgaben an den anderen Rändern sind jeweils analog.

(10.1.1) Die Approximation erster Ordnung nach Engquist und Majda (7.9)

$$u_y - u_t \Big|_{y=0} = 0$$

(10.1.2) Die L_2 -Approximation erster Ordnung nach Satz (7.12)

$$u_y - \alpha u_t \Big|_{y=0} = 0$$

mit verschiedenen Parametern α .

(10.1.3) Die Approximation zweiter Ordnung nach Engquist und Majda

$$u_{yt} - u_{tt} - \frac{1}{2}u_{xx} \Big|_{y=0} = 0$$

(10.1.4) Eine L_2 -Approximation zweiter Ordnung nach Satz (7.21)

$$u_{yt} - u_{tt} - \beta u_{xx} \Big|_{y=0} = 0$$

(vgl. (7.26)) mit verschiedenen Parametern β .

Bemerkungen zu den Randbedingungen (10.1.1)-(10.1.4):

- a) Die Diskretisierung dieser Randbedingungen lehnt sich an Majda und Engquist (1977) an.
- b) Die Plots 1 und 2 zeigen die reflektierte Energie in Abhängigkeit von der Zeit für verschiedene Parameterwerte α, β , wobei

$\alpha=1$ bzw. $\beta=\frac{1}{2}$ den Verfahren von Engquist und Majda entspricht.¹⁾

- c) Engquist und Majda (1979) schlagen vor, in den Ecken die Approximation erster Ordnung zu verwenden. Der in Plot 2 angegebene erste Parameter bezieht sich auf dieses α , der zweite Parameter auf β .
- d) Man sieht, daß die L_2 -Verfahren insgesamt weniger Energie reflektieren. Daß sie nach wenigen Zeitschritten, also bei fast senkrechtem Einfall der Welle, etwas schlechter sind, ist klar; die Approximation wurde gerade so gewählt, daß der gesamte Winkelbereich besser abgedeckt wird.

Weitere Randbedingungen:

- (10.1.5) Das Verfahren von Trautenberg (1980) als Spezialfall des Verfahrens der Propagationsmatrizen mit Summation über die letzten 10 bzw. 20 Zeitschichten.
- (10.1.6) Wie (10.1.5), jedoch wurden in den Ecken, wo nicht genügend Zeitschichten zur Summation zur Verfügung stehen, die Randwerte nach (10.1.4) berechnet.

Die Absorptionseigenschaften dieser Randbedingungen sind in den Plots 3 und 4 dargestellt.

Die angegebenen Parameter haben folgende Bedeutung:

1) Die reflektierte Energie wurde berechnet, indem die Gleichung in einem größeren Grundgebiet (96×86 Punkte) integriert wurde. Subtrahiert man von dieser Lösung die Lösung im Teilgebiet, so erhält man zu kleinen Zeiten (≤ 70 Zeitschritte) die reflektierte Welle, von der die Energie berechnet werden kann.

Der erste Parameter gibt an, in wievielen Punkten der Ecke die RB (10.1.4) verwendet wurde, die anderen Parameter zeigen die dafür verwendeten Werte von α und β .

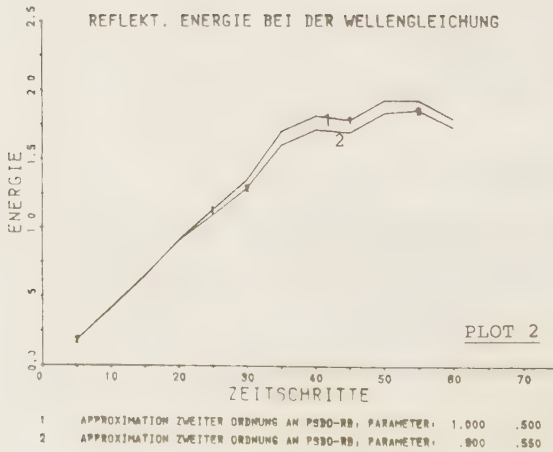
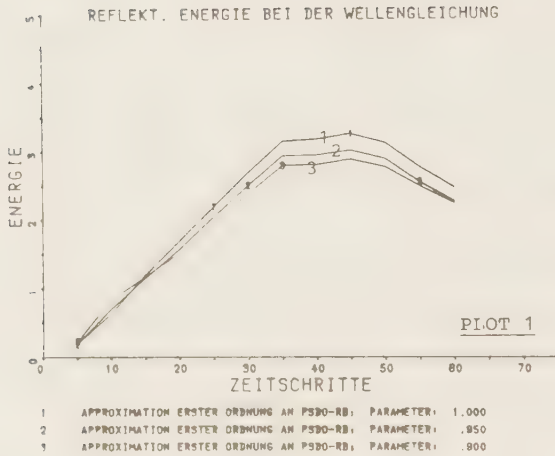
Die Verbesserung von (10.1.5) auf (10.1.6) ist überraschend hoch. Dies ist damit zu begründen, daß, bedingt durch die Größe des Gebietes, der in die Ecken einfallende Anteil der Energie sehr hoch ist.

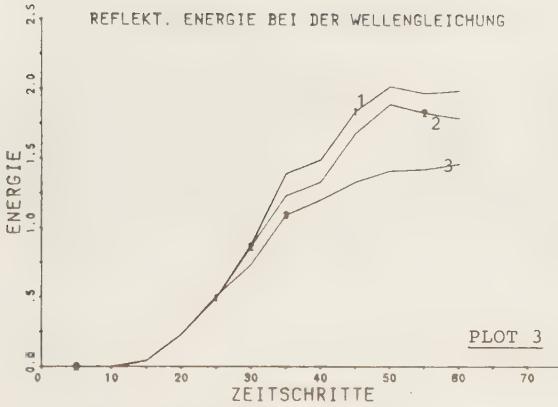
Die Plots 5/6 und 7/8 zeigen jeweils die reflektierte Welle zu den Zeiten $t=50$ und $t=60$. Man erkennt, daß bei nicht modifizierter Eckenbehandlung nach (10.1.5) (Plots 5/6) die Ecken als "Sender" wirken; dieser Effekt ist beim Verfahren (10.1.6) deutlich geringer.

Bemerkenswert ist, daß von allen implementierten Verfahren das Verfahren (10.1.6) mit modifizierter Eckenbehandlung die wenigste Energie reflektiert und durch Berücksichtigung von mehr Zeitschichten noch verbessert werden kann.

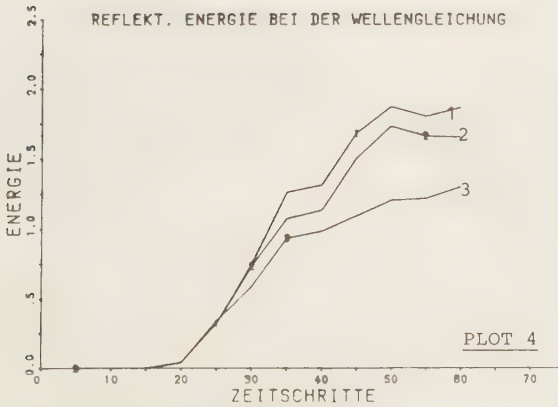
Dies rechtfertigt in einigen Anwendungen eventuell den erhöhten Rechenzeitbedarf: Für 65 Zeitschritte mit (10.1.4) benötigte das Programm ca 3,5 sec Rechenzeit, mit (10.1.6) und Summation über die letzten 20 Zeitschichten ca 16 sec.¹⁾

1) Sämtliche Rechnungen wurden am Cyber 175 (CDC) des Leibniz-Rechenzentrums, München, durchgeführt.





- 1 RANDBED. (10.1.5) MIT 10 SCHICHTEN;
- 2 RANDBED. (10.1.8) MIT 10 SCHICHTEN; PARAMETER: 4 .900 .550
- 3 RANDBED. (10.1.6) MIT 10 SCHICHTEN; PARAMETER: 8 .900 .550

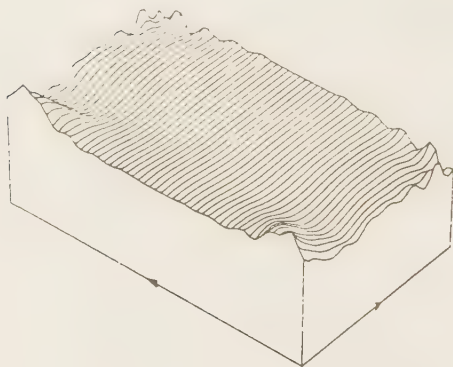


- 1 RANDBED. (10.1.5) MIT 20 SCHICHTEN;
- 2 RANDBED. (10.1.8) MIT 20 SCHICHTEN; PARAMETER: 4 .900 .550
- 3 RANDBED. (10.1.6) MIT 20 SCHICHTEN; PARAMETER: 8 .900 .550

WELLENGLEICHUNG: REFLEXION MAL 9.0
 ZEITSCHICHT 50
 GROSSESTER ABSOLUTER WERT: .02 L2-NORM: 1.07
 ART DER RB: 120 ECKENBEHANDLUNG: 0

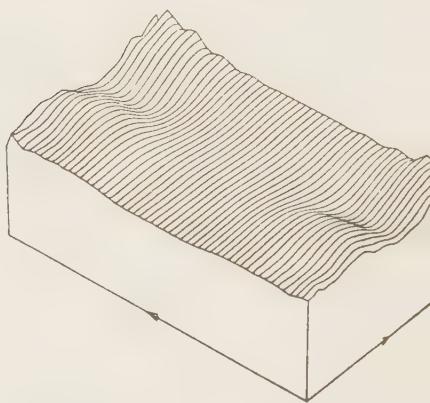
- 86 -

WELLENGLEICHUNG: REFLEXION MAL 9.0
 ZEITSCHICHT 65
 GROSSESTER ABSOLUTER WERT: .02 L2-NORM: 1.77
 ART DER RB: 120 ECKENBEHANDLUNG: 0



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 52/ 32
 L2-PARAMETER .900 .550

PLOT 5

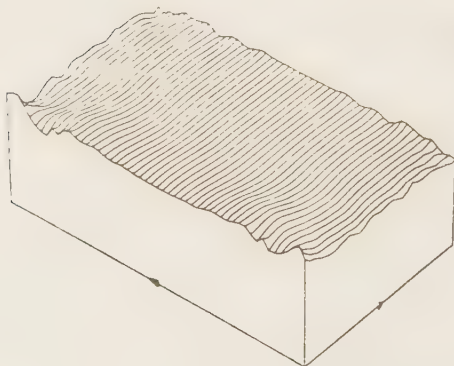


GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 52/ 32
 L2-PARAMETER .900 .550

PLOT 6

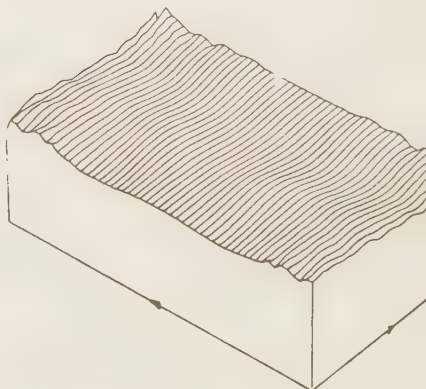
WELLENGLEICHUNG: REFLEXION MAL 9.0
 ZEITSCHICHT 50
 GROSSESTER ABSOLUTER WERT: .01 L2-NORM: 1.20
 ART DER RB: 120 ECKENBEHANDLUNG: 0

WELLENGLEICHUNG: REFLEXION MAL 9.0
 ZEITSCHICHT 65
 GROSSESTER ABSOLUTER WERT: .02 L2-NORM: 1.20
 ART DER RB: 120 ECKENBEHANDLUNG: 0



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 52/ 32
 L2-PARAMETER .900 .550

PLOT 7



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 52/ 32
 L2-PARAMETER .900 .550

PLOT 8

Ein hyperbolisches System erster Ordnung: Flachwasserwellen

Gegeben sei das hyperbolische System erster Ordnung in zwei Raumdimensionen

$$(10.2) \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}_t = u_t = A u_y + B u_x$$

mit $u \in \mathbb{R}^3$, $A, B \in \mathbb{R}^{3,3}$,

$$(10.3) \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix},$$

im Halbraum $y \geq 0$.

Ein derartiges System erhält man z.B. durch Linearisierung der Gleichungen der Gasdynamik oder der Gleichungen, die die Wellenbewegung in flachem Wasser beschreiben (Courant-Friedrichs (1948)).

Wir wählen $a=-1$, $b=2$, $c=12$, also das Beispiel, das auch in der Arbeit von Engquist-Majda (1977) gerechnet wird.

Die Gleichungen werden auf einem Gitter mit 32 Punkten in y -Richtung, 104 Punkten in x -Richtung diskretisiert und durch ein dissipatives Lax-Wendroff-Schema (vgl. Richtmyer-Morton (1967), Kreiss (1964), Lax-Wendroff (1962)) approximiert:

$$(10.4) \quad \begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n + \frac{\lambda}{2} B (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} B^2 (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \\ & + \frac{\lambda}{2} A (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n) + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} A^2 (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta y} = .04$$

mit Raumschrittweite $\Delta x, \Delta y$ und Zeitschrittweite Δt .

Als Anfangsvorgaben für u wurden gewählt:

$$(10.5) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 ,$$

$\varphi(0,x,y)$ = Gaußwelle analog zu (10.1).

Anschaulich ergibt diese Wahl in etwa eine Kreiswelle, die von einer durch die Wahl von A,B bestimmten Strömung mitgenommen wird.

Auf den Rand $y=1 \times \Delta y$ treffen also bei kleinen Zeiten die Wellen fast senkrecht auf, mit zunehmender Zeit wird der Winkel zwischen Wellenfront und Randnormale zunehmend größer (vgl. Plots 13/14/15, wo die Wasserhöhe φ zu verschiedenen Zeiten dargestellt ist).

An den Rändern $y=32 \times \Delta y$, $x=1 \times \Delta x$, $x=104 \times \Delta x$ wurden reflektierende Randbedingungen vorgeschrieben.

Am Rand $y=1 \times \Delta y$ wurden die verschiedenen Randbedingungen der Kapitel 7 und 8 implementiert.

Durch Rechnung in einem nach links (d.h. nach $y=i \times \Delta y$, $i \leq 0$) vergrößerten Gebiet wurde eine "exakte" Referenzlösung bestimmt, die keine reflektierten Lösungsanteile in $y=i \times \Delta y$ ($i > 0$) enthält. Durch Subtraktion dieser Lösung in $y \geq 1 \times \Delta y$ von der Lösung, die sich mit verschiedenen Randbedingungen bei $y=1 \times \Delta y$ dort ergibt, kann dann die reflektierte Welle und ihre Energie bestimmt werden.

Folgende Randbedingungen wurden verwendet:

(10.6) Die Randbedingung erster Ordnung von Engquist-Majda (1977,p. 645) sowie die RB zweiter Ordnung.

(10.7) Die verbesserte Randbedingung zweiter Ordnung von Engquist-Majda (1977,p.646)

- (10.8) Eine allgemeine Approximation erster Ordnung an die Pseudodifferentialoperator-RB nach (8.20). - Zur konkreten Durchführung siehe (10.13).
- (10.9) Eine allgemeine Approximation zweiter Ordnung an die PSDO-RB (siehe (10.13)).
- (10.10) Das Verfahren der Propagationsmatrizen nach Kapitel 8 mit 10 bzw. 20 berücksichtigten Zeitschichten, d.h. $n_0=10$ bzw. $n_0=20$ in (8.5).

Ergebnisse: ¹⁾

- 1) Die Randbedingungen nach (10.8) und (10.9) sind nach wenigen Zeitschritten (also bei ungefähr senkrechtem Welleneinfall) schlechter als die Randbedingungen nach (10.6) und (10.7), absorbieren allerdings flacher einfallende Wellen wesentlich besser (vgl. Plots 16/17/18 und 19/20/21); es ist jeweils die φ -Komponente dargestellt, die der Wasserhöhe entspricht), so daß insgesamt weniger Energie reflektiert wird (Plot 9 und 10).

Bei der Wellengleichung war dieses Verhalten mit der Approximation der Dispersionskurve in einem größeren Winkelbereich begründet worden, ähnliche Überlegungen kann man wohl auch hier anstellen.

- 2) Die Randbedingung erster Ordnung (10.8) reflektiert insgesamt sogar weniger Energie als die Randbedingung zweiter Ordnung (10.6), die eben nur die senkrecht einfallenden Wellen gut absorbiert (Plot 11).

1) Zur Erklärung der auf den Zeichnungen angegebenen Parameter vgl. (10.13).

- 3) Bei den Randbedingungen zweiter Ordnung ist eine partielle Differentialgleichung auf dem Rand zu integrieren. Aus Genauigkeits- und Stabilitätsgründen empfiehlt es sich, gelegentlich einen Schritt mit einer Randbedingung erster Ordnung durchzuführen. Die Ergebnisse aus 1) und 2) blieben von der Wahl der Restartabstände weitgehend unberührt. (Bemerkung: Ein Restart nach je 15 Schritten scheint eine gute Wahl zu sein.)
- 4) Die Randbedingung (10.10) ist anwendbar¹⁾ und hat den Vorteil, daß keine Variable extrapoliert werden muß (sogenannte extraneous boundary condition, vgl. Kreiss-Lundqvist (1969), Kreiss-Oliger (1973), Chu-Sereny (1974)). Der Rechenzeitbedarf ist allerdings bei diesem Beispiel so hoch, daß das Verfahren in der Praxis kaum brauchbar zu sein scheint.²⁾ Dies liegt mit an der durch die Stabilität erzwungenen kleinen Zeitschrittweite Δt , das Verfahren wird bei größerem Δt besser (Gebauer (1981)); eine Erklärung dafür scheint zu sein, daß damit mehr "Echtzeitinformation" über die Lösung verwendet wird.
- 5) Die Plots 25/26/27 zeigen die reflektierte Welle bei reflektierenden Randbedingungen. Der Maßstab ist dabei gegenüber den anderen Zeichnungen um einen Faktor 3 gestaucht. Man stellt fest, daß die Verwendung absorbierender Randbedingungen auf jeden Fall angebracht ist.
-
- 1) Siehe Plot 12 für die reflektierte Energie und Plots 22/23/24 für eine Darstellung der reflektierten Welle bei 20 berücksichtigten Zeitschichten.
- 2) Gegenüber (10.9) bei 20 berücksichtigten Zeitschichten ein Faktor 100.

(10.11) Bemerkung: Die Frage der Stabilität der diskreten Anfangs/Randwertprobleme zu untersuchen erscheint beim gegenwärtigen Stand der Theorie verfrüht.

Kreiss (1966) (1969) (1971) (1974), Gustafsson-Kreiss-Sundström (1972) haben sich ausführlich mit dieser für die Konvergenz wichtigen Problematik beschäftigt, aber die Resultate tragen nur in einer Raumdimension. Bei unseren Beispielen scheint die Stabilität für die Diskretisierung der sachgemäßen Anfangs/Randwertprobleme gegeben zu sein, wie die Rechnung nahelegt.

(10.12) Bemerkung: Bei nichtlinearen Problemen kann man die in dieser Arbeit behandelten Methoden heuristisch auf die linearisierten Gleichungen anwenden (vgl. auch Hedstrom (1979), Rudy-Strikwerda (1980)). Aussagen über die Konvergenz der Lösung im Teilgebiet gegen die Lösung im Gesamtgebiet analog zu Gustafsson-Kreiss (1979) sind allerdings kaum mehr möglich, da z.B. auslaufende Kompressionswellen auch zu späteren Zeiten das Innere des Gebietes beeinflussen.

(10.13) Herleitung der RB (10.8), (10.9)

Wir betrachten ein System der Form (10.2)

$$(10.13.1) \quad u_t = Au_y + Bu_x$$

In (5.10)¹⁾ wurde gezeigt, wie das System mit Hilfe einer durch einen Pseudodifferentialoperator der Ordnung $m=0$ gegebenen Transformation (vgl. (4.8)) $w = V(\partial_t, \partial_x)u$ auf die Form

$$(10.13.2) \quad w_y = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(\partial_t, \partial_x) & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} w$$

1) Wir übernehmen die Notation von Kapitel 5, nehmen hier allerdings der Einfachheit halber konstante Koeffizienten an.

gebracht wird und daß die theoretisch absorbierende Randbedingung durch

$$(10.13.3) \quad \pi_{j_0} \left(w' \Big|_{y=0} \right) = \pi_{j_0} \left(v u' \Big|_{y=0} \right) = 0$$

gegeben wird. In Kapitel 7 wurde die Approximation durch Taylor-Entwicklung von $V(\tau, \xi)$ von Engquist-Majda (1977) angegeben.

Die Randbedingung (10.6) erster Ordnung berechnet sich damit über

$$(10.13.4) \quad V(\tau, \xi) = V(1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

zu

$$\begin{aligned} w_1 \Big|_{y=0} &= (u - \varphi) \Big|_{y=0} = 0, \\ w_2 \Big|_{y=0} &= v \Big|_{y=0} = 0, \end{aligned}$$

die dritte Komponente, w_3 , ist zu extrapolieren.

Die Randbedingung zweiter Ordnung erhält man aus

$$V(\tau, \xi) = V(1, 0) + \frac{\xi}{\tau} \partial_{\xi} V_0(\tau, \xi) \Big|_{(1, 0)}.$$

Engquist und Majda geben nun über einen Störungsansatz und eine recht aufwendige Rechnung (1977, p.462f) zwei Formeln für $\partial_{\xi} V_0(1, 0)$ an, die den Randbedingungen zweiter Ordnung (10.6) und (10.7) zugrunde liegen.

Wir schlagen demgegenüber in Analogie zu Kapitel 7 folgendes Vorgehen zur Approximation von $V(\tau, \xi)$ vor, das auf die Randbedingungen (10.8), (10.9) führt:

Anstatt $V(\tau, \xi) = V(1, \frac{\xi}{\tau})$ wie oben durch eine abgebrochene Taylorreihe um $\xi/\tau = 0$ zu approximieren, versuchen wir eine geeignete L_2 -Approximation an $V(1, \alpha)$ zu finden.

$V(1, \alpha)$ besteht aus den Eigenvektoren von $G(1, \alpha)$ (vgl. (5.10)). Man könnte versuchen, wie in (7.30) eine explizite Formel für die Eigenvektoren herzuleiten, es bietet sich aber eine numerische Berechnung von $V(1, \alpha)$ für verschiedene Werte α_i von α , die so gewählt sein müssen, daß die Eigenwerte von $G(1, \alpha)$ das Vorzeichen nicht ändern, geradezu an.

Man bestimmt dann $V(1, \alpha)$ als Funktion von α , indem man $V(1, \alpha)$ als beste Approximierende (in einem Polynomraum) an die $V(1, \alpha_i)$ wählt.

Man erhält z.B. numerisch beim Beispiel der Flachwasserwellen mit $a=-1$, $b=2$, $c=12$ als zum positiven Eigenwert gehörigen Eigenvektor $v_3(1, \alpha_i)$:

$$\begin{aligned}
 (10.13.5) \quad v_3(1, 0) &= (.707, 0, .707) \quad , \\
 v_3(1, -.01) &= (.678, -.0723, .731) \quad , \\
 v_3(1, .01) &= (.675, .075, .733) \quad , \\
 v_3(1, -.02) &= (.590, -.153, .791) \quad , \\
 v_3(1, .02) &= (.570, .168, .803) \quad .
 \end{aligned}$$

Als diskrete L_2 -Approximation im Intervall $(-.04, .04)$, in dem die Eigenwerte von $G(1, \alpha)$ ihr Vorzeichen nicht ändern, kann z.B. aufgefaßt werden

$$(10.13.6) \quad v_3(1, \alpha) = (r_1 + s_1 \alpha, r_2 + s_2 \alpha, r_3 + s_3 \alpha) = (.6, 7.5\alpha, .8) .$$

Die Approximationen von Engquist-Majda erhält man als Grenzfall, indem man das Intervall gegen den Nullpunkt schrumpfen läßt:

$$(10.13.7) \quad v_3^*(1, \alpha) = (.707, 7.1\alpha, .707)$$

Bei der Approximation erster Ordnung sieht man sofort die Übereinstimmung mit der dritten Zeile in (10.13.4).

Der Grund, weshalb wir uns hier auf die Angabe des dritten Eigenvektors beschränkt haben, wird sofort klar, wenn man die Randbedingung (10.13.3) betrachtet:

$w_1|_{y=0} = w_2|_{y=0} = 0$; w_3 ist aus numerischen Gründen beim Lax-Wendroff-Schema zu extrapolieren, da die Differenzengleichung drei Randwerte benötigt (vgl. Kreiss-Lundqvist (1969), Kreiss-Oliger (1973), Chu-Sereny (1974)).

In untransformierter Form lauten die Randbedingungen damit

$$(10.13.8) \quad \begin{aligned} \mu|_{y=0} &= (r_1 + s_1 \alpha) w_3|_{y=0} , \\ v|_{y=0} &= (r_2 + s_2 \alpha) w_3|_{y=0} , \\ \varphi|_{y=0} &= (r_3 + s_3 \alpha) w_3|_{y=0} \end{aligned}$$

und $w_3(t, x, y) = (r_1 + s_1 \alpha) \mu + (r_2 + s_2 \alpha) v + (r_3 + s_3 \alpha) \varphi$ kann ebenfalls bei Kenntnis von $v_3(1, \alpha)$ extrapoliert werden. Dazu ist nur noch bei der Randbedingung (10.9) $\alpha = \xi/\tau$ wieder durch ∂_x/∂_t zu ersetzen.

Damit sind die Randbedingungen (10.8), bei denen $\alpha=0$ gewählt wird, und (10.9) hergeleitet.

Die Parameter r_1, r_3, s_2 , die in den Plots angegeben sind, beziehen sich auf (10.13.6) und (10.13.7).

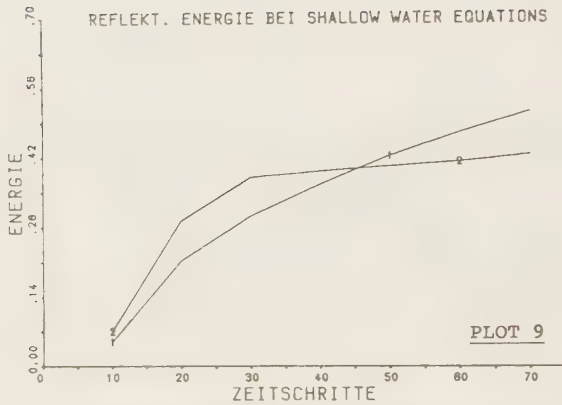
(10.14) Bemerkung: Die Transformationsmatrix V ist nicht eindeutig, daher stimmt unsere Randbedingung zweiter Ordnung in (10.6) nicht mit jener in Engquist-Majda (1977) überein. Die Randbedingung (10.7) wurde aus dieser Arbeit, um die

Ergebnisse von (10.9) damit vergleichen zu können, direkt übernommen. (Man beachte: Dort hat w andere Bedeutung als hier.)

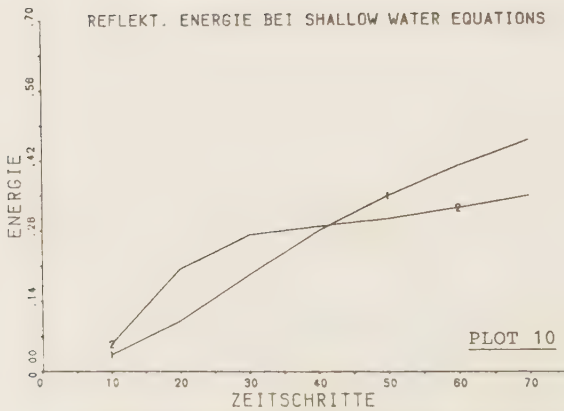
(10.15) Bemerkung: Die hier vorgeschlagene Methode hat zwei Vorteile:

Zum einen bietet sie die in Kapitel 7 beschriebene bessere Approximation über einen größeren Bereich von Einfallswinkeln, was, wie die numerischen Ergebnisse bestätigen, bessere Absorptionseigenschaften zur Folge hat.

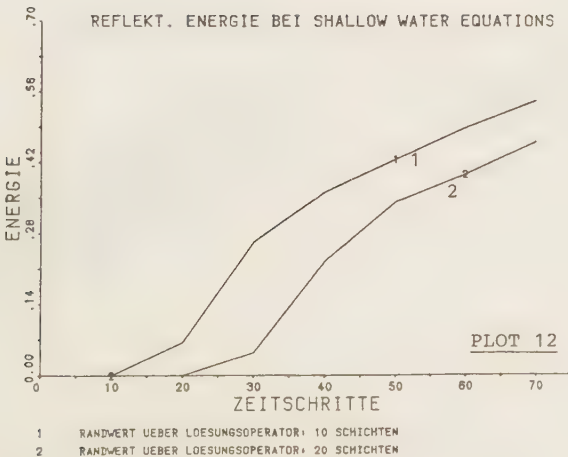
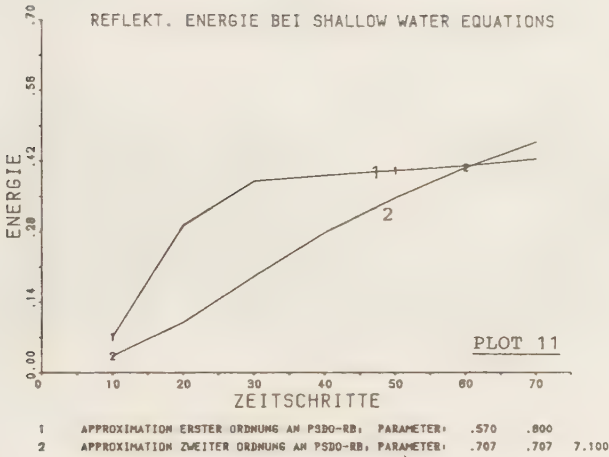
Zum anderen kann die Approximation völlig vom Rechner durchgeführt werden; das Erstellen nichtreflektierender Randbedingungen über den Ansatz mit Pseudodifferentialoperatoren kann somit automatisiert werden.



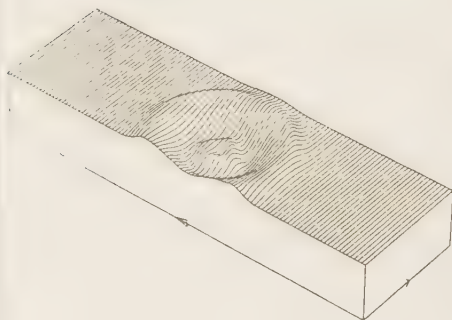
1 APPROXIMATION ERSTER ORDNUNG AN PSDO-RB; PARAMETER: .707 .707
 2 APPROXIMATION ERSTER ORDNUNG AN PSDO-RB; PARAMETER: .570 .800



1 APPROXIMATION ZWEITER ORDNUNG AN PSDO-RB; PARAMETER: .707 .707 7.100
 2 APPROXIMATION ZWEITER ORDNUNG AN PSDO-RB; PARAMETER: .800 .800 7.500



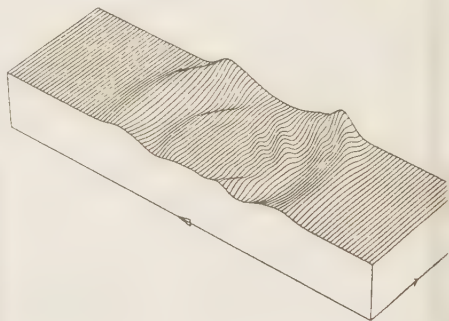
LOESUNG FLACHWASSERWELLE (MAL 1.0)
 ZEITSCHICHT 30
 L2-NORM: 2.5403
 ART DER RB: 3
 L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .707 .707 7.100



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

13

LOESUNG FLACHWASSERWELLE (MAL 1.0)
 ZEITSCHICHT 50
 L2-NORM: 2.3597
 ART DER RB: 3
 L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .707 .707 7.100



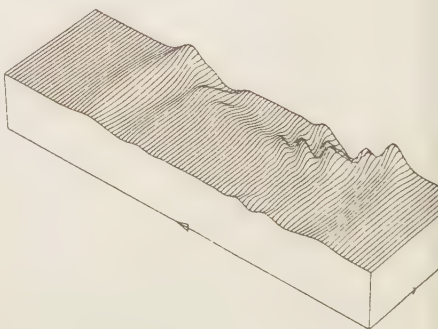
GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

14

PLOTS 13/14/15:

Lösung der Gleichung (10.2),
 (10.5) bei nach links offenem
 Gebiet. (Die Wellenhöhe ist
 gegenüber den Plots 16-24 um
 einen Faktor 9 verkleinert.)

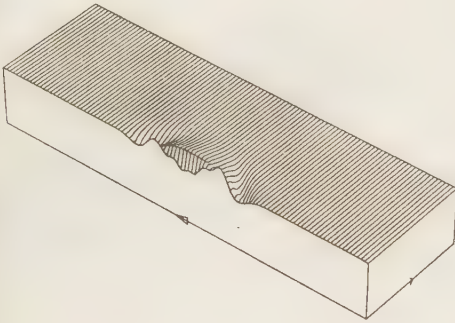
LOESUNG FLACHWASSERWELLE (MAL 1.0)
 ZEITSCHICHT 70
 L2-NORM: 2.3230
 ART DER RB: 3
 L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .707 .707 7.100



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
 ZEITSCHICHT 30
 L2-NORM: .2151
 ART DER RB: 3
 L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .707 .707 7.100

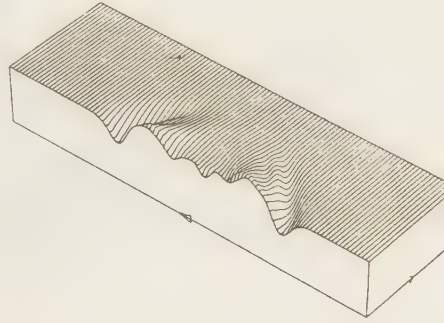
15



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

16

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
 ZEITSCHICHT 50
 L2-NORM: .3522
 ART DER RB: 3
 L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .707 .707 7.100



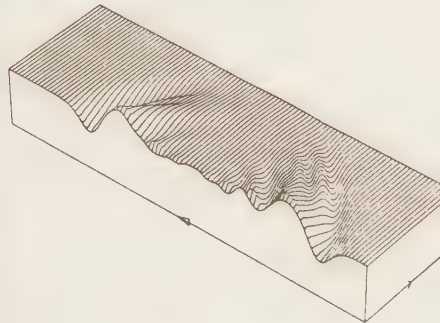
GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

17

PLOTS 16/17/18:

Reflektierte Welle bei der
 Randbedingung (10.6) zwei-
 ter Ordnung am linken Rand.

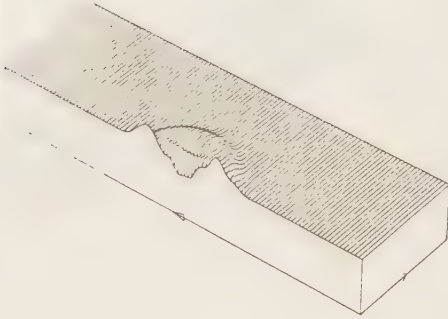
FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
 ZEITSCHICHT 70
 L2-NORM: .4543
 ART DER RB: 3
 L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .707 .707 7.100



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

18

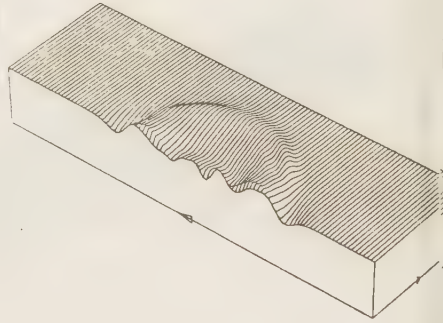
FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
ZEITSCHICHT 30
L2-NORM: .3311
ART DER RB: 3
L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .600 .800 7.500



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

19

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
ZEITSCHICHT 50
L2-NORM: .3347
ART DER RB: 3
L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .600 .800 7.500

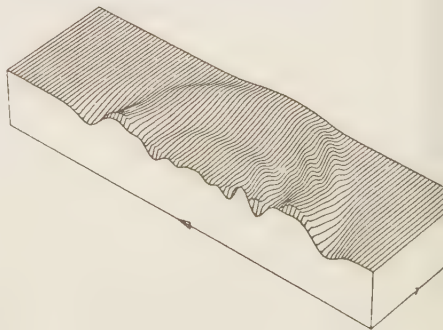


GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

PLOTS 19/20/21:

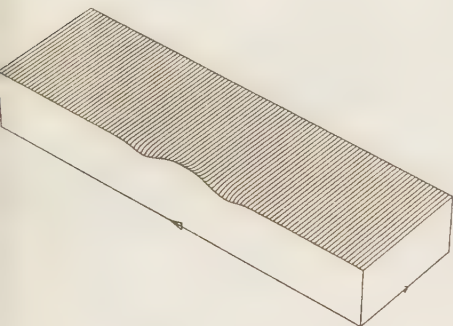
Reflektierte Welle bei
Randbedingung (10.9) am
linken Rand.

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
ZEITSCHICHT 70
L2-NORM: .3540
ART DER RB: 3
L2-PARAMETER (R1,R3,S2): .600 .800 7.500



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

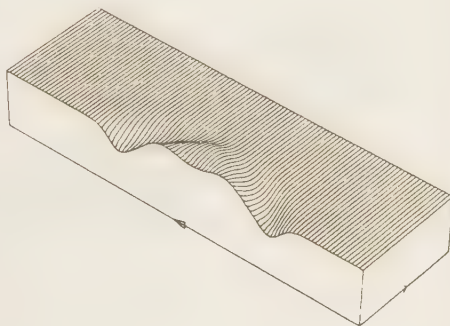
FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
ZEITSCHICHT 30
L2-NORM: 0446
ART DER RB: 10
BERUECKSICHTIGTE ZEITSCHICHTEN: 20



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

22

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
ZEITSCHICHT 50
L2-NORM: .3427
ART DER RB: 10
BERUECKSICHTIGTE ZEITSCHICHTEN: 20



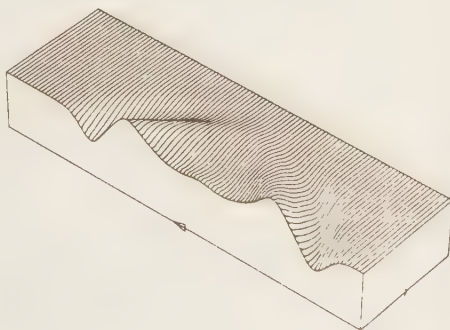
GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

23

PLOTS 22/23/24:

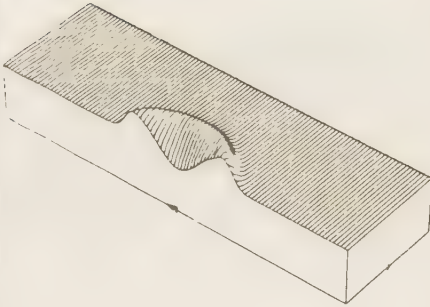
Reflektierte Welle bei
Randbedingung. (10.10)
mit 20 berücksichtigten
Zeitschichten am linken
Rand.

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 9.00
ZEITSCHICHT 70
L2-NORM: .4607
ART DER RB: 10
BERUECKSICHTIGTE ZEITSCHICHTEN: 20



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 22

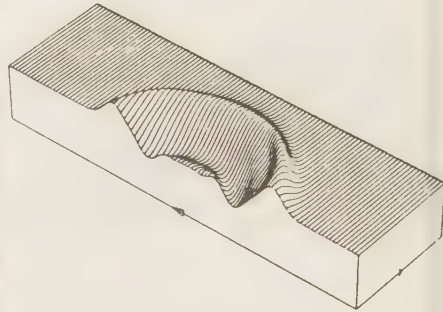
FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 3.00
ZEITSCHNITT 70
L2-NORM: 1.4367
ART DER RB: 0



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

25

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 3.00
ZEITSCHNITT 50
L2-NORM: 1.7981
ART DER RB: 0



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

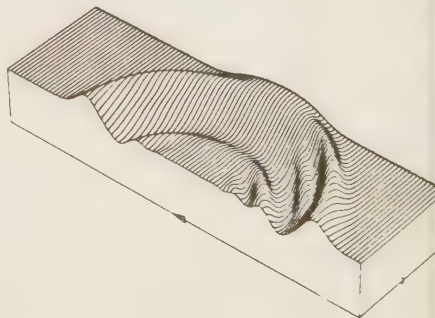
26

PLOTS 25/26/27:

Reflektierte Welle bei
reflektierenden Randbedin-
gungen $\mu_1 = \mu_2 = 0$.
 R_d R_d

(Die Wellenhöhe ist gegen
die Plots 16-24 um einen
Faktor 3 reduziert).

FLACHWASSERWELLE: REFLEXION MAL 3.00
ZEITSCHNITT 70
L2-NORM: 2.0080
ART DER RB: 0



GITTERPUNKTE IN X/Y-RICHTUNG 104/ 32

27

LITERATUR

- A. BAYLISS, E. TURKEL : Radiation Boundary Conditions for
Wave-Like Equations
Comm. Pure Appl. Math. #33 (1980) 707-725
- L. BERS, F. JOHN, M. SCHECHTER : Partial Differential Equations
John Wiley & Sons, New York (1964)
- L. BOUTET DE MONVEL : A Course on Pseudo Differential Operators
and their Applications
Duke Univ. Math. Series II, Durham (1976)
- I. BRONSTEIN, K. SEMENDJAJEW : Taschenbuch der Mathematik
Verlag H. Deutsch, Zürich (1973)
- A. CALDERON, A. ZYGMUND : Singular Integral Operators and
Differential Equations
American J. of Math. #79 (1957) 901-921
- C. CHU, A. SERENY : Boundary Conditions in Finite Difference
Fluid Dynamic Codes
J. Comp. Physics #15 (1974) 476-491
- R. CLAYTON, B. ENGQUIST : Absorbing Boundary Conditions for
Acoustic and Elastic Wave Calculations
Bull. Seismological Soc. Amer. #67 (1977) 1529-1540
- R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS : Supersonic Flow and Shock Waves
Interscience Publishers, New York (1948)
- R. COURANT, D. HILBERT : Methods of Mathematical Physics II
Interscience Publishers, New York (1962)
- G. DOETSCH : Handbuch der Laplace Transformation I
Birkhäuser Verlag, Basel (1950)
- J. J. DUISTERMAAT : Fourier Integral Operators
Courant Inst. Lecture Note, New York (1973)
- J. J. DUISTERMAAT, L. HÖRMANDER : Fourier Integral Operators II
Acta Math. #128 (1972) 183-269

- T.ELVIUS, A.SUNDSTRÖM : Computationally Efficient Schemes and
Boundary Conditions for a Fine Mesh Barotropic
Model Based on the Shallow Water Equations
Tellus #25 (1973)132-156
- B.ENGQUIST, A.MAJDA : Absorbing Boundary Conditions for the
Numerical Simulation of Waves
Math. Comp. #31 (1977)629-651
- B.ENGQUIST, A.MAJDA : Radiation Boundary Conditions for Acoustic
and Elastic Wave Calculations
Comm. Pure Appl. Math. #32 (1979)313-357
- S.FLÜGGE : Handbuch der Physik I
Springer Verlag, Berlin (1956)
- K.O.FRIEDRICHS, P.D.LAX : Boundary Value Problems for First
Order Operators
Comm. Pure Appl. Math. #18 (1965)355-388
- A.GABOR : Remarks on the Wave Front of a Distribution
Transactions of the AMS #170 (1972)239-244
- P.R.GARABEDIAN : Partial Differential Equations
John Wiley & Sons, New York (1964)
- J.GARY : On Boundary Conditions for Hyperbolic Difference
Schemes
J. Comp. Physics #26 (1978)339-351
- K.GEBAUER : Nichtreflektierende Randbedingungen für die
Wellengleichung
Diplomarbeit, Universität München (1981)
- D.GOTTLIEB, E.TURKEL : Boundary Conditions for Multistep Finite
Difference Methods for Time Dependent Equations
J. Comp. Physics #26 (1978)181-196
- C.GROSCH, S.ORSZAG : Numerical Solution of Problems in
Unbounded Regions: Coordinate Transforms
J. Comp. Physics #25 (1977)273-295
- B.GUSTAFSSON, H.O.KREISS : Boundary Conditions for Time Depen-
dent Problems with an Artificial Boundary
J. Comp. Physics #30 (1979)333-351

- B.GUSTAFSSON, H.O.KREISS, A.SUNDSTRÖM : Stability Theory of
Difference Approximations for Initial Boundary
Value Problems II
Math. Comp. #26 (1972)649-686
- G.W.HEDSTROM : Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear
Hyperbolic Systems
J. Comp. Physics #30 (1979)222-237
- R.HOGG, A.CRAIG : Introduction to Mathematical Statistics
Macmillan Co., New York (1959)
- L.HÖRMANDER : Linear Partial Differential Operators
Springer Verlag, Berlin (1963), fourth printing (1976)
- L.HÖRMANDER : Pseudo Differential Operators
Comm. Pure Appl. Math. #18 (1965)501-517
- L.HÖRMANDER : Linear Differential Operators
Actes, Congrès Intern. Math. 1 (1970)121-133
- L.HÖRMANDER (1971a) : Fourier Integral Operators I
Acta Math. #170 (1971)79-183
- L.HÖRMANDER (1971b) : On the Existence and Regularity of Solutions
of Linear Pseudo Differential Equations
L'Enseignement Math., Ser. II #17 (1971)99-163
- L.HÖRMANDER (1971c) : Uniqueness Theorems and Wave Front Sets
for Solutions of Linear Differential Equations with
Analytic Coefficients
Comm. Pure Appl. Math. #24(1971)671-704
- M.ISRAELI, S.ORSZAG : Approximation of Radiation Boundary
Conditions
J. Comp. Physics #41(1981)115-135
- A.JEFFREY : Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves
Research Notes in Math., Pitman Publishing,
London (1976)
- F.JOHN : Partial Differential Equations, 2nd ed.
Springer Verlag, New York (1975)
- J.J.KOHN, L.NIRENBERG : An Algebra of Pseudo Differential
Operators
Comm. Pure Appl. Math. #18 (1965)269-305

- H.O.KREISS : Über sachgemäße Cauchyprobleme
Math. Scand. #13 (1963)109-128
- H.O.KREISS : On Difference Approximations of the Dissipative
Type for Hyperbolic Differential Equations
Comm. Pure Appl. Math. #17 (1964)335-353
- H.O.KREISS : Difference Approximations for the Initial Boundary
Value Problem in Hyperbolic Differential Equations
in: Num. Sol. of Nonlinear DE, edited by D.Greenspan
John Wiley & Sons, New York (1966)
- H.O.KREISS : Stability Theory for Difference Approximations of
Mixed Initial Boundary Value Problems I.
Math. Comp. #22 (1969)703-714
- H.O.KREISS : Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic
Systems
Comm. Pure Appl. Math. #23 (1970)277-298
- H.O.KREISS : Difference Approximations for Initial Boundary
Value Problems
Proc. Roy. Soc. London A323 (1971)255-261
- H.O.KREISS : Boundary Conditions for Hyperbolic Differential
Equations
in: Conference on the Num. Sol. of Diff. Equations
Lecture Notes in Math. #363, Springer Verlag,
New York (1974)
- H.O.KREISS, E.LUNDQVIST : On Difference Approximations with
Wrong Boundary Values
Math. Comp. #22 (1969)1-12
- H.O.KREISS, J.OLIGER : Methods for the Approximate Solution of
Time Dependent Problems
GARP Publication Series #10, World Meteorological
Organization, Genf (1973)
- P.D.LAX : Asymptotic Solutions of Oscillatory Initial Value
Problems
Duke Math. J. #24 (1957)627-646

- P.D.LAX, R.S.PHILLIPS : Local Boundary Conditions for Dissipative
Symmetric Linear Differential Operators
Comm. Pure Appl. Math. #13 (1960)427-455
- P.D.LAX, B.WENDROFF : On the Stability of Difference Schemes
Comm. Pure Appl. Math. #15 (1962)363-371
- E.LINDMAN : "Free-Space" Boundary Conditions for the Time
Dependent Wave Equation
J. Comp. Physics #18 (1975)66-78
- J.LYSMER, R.KUHLEMEYER : Finite Dynamic Model for Infinite Media
J. Eng. Mech. Div. ASCE #95EM4 (1969)859-877
- A.MAJDA : Disappearing Solutions for the Dissipative Wave Equation
Indiana Univ. Math. J. #24 (1975)1119-1133
- A.MAJDA, S.OSHER : Reflections of Singularities at the Boundary
Comm. Pure Appl. Math. #28 (1975)479-499
- R.NARASIMHAN : Analysis on Real and Complex Manifolds
North Holland Publ. Co., Amsterdam (1968)
- L.NIRENBERG : Pseudo Differential Operators
Proc. Symp. Pure Math. #16, American Math. Soc.,
Providence (1970)149-167
- L.NIRENBERG : Lectures on Linear Partial Differential Equations
Regional Conference Series in Math. #17,
American Math. Soc., Providence (1973)
- A.POVZNER, I.SUKAREVSKII : Discontinuities of the Green's
Function of a Mixed Problem for the Wave Equation
AMS Translations Ser.2#47 (1965)131-156
- J.B.RAUCH, F.J.MASSEY : Differentiability of Solutions to
Hyperbolic Initial Boundary Value Problems
Transactions of the AMS #189 (1974)303-318
- J.RAUCH, M.TAYLOR : Decay of Solutions to Nondissipative
Hyperbolic Systems on Compact Manifolds
Comm. Pure Appl. Math. #28 (1975)501-523
- A.C.REYNOLDS : Boundary Conditions for the Numerical Solution
of Wave Propagation Problems
Geophysics #63 (1978)1099-1110

- R.D.RICHTMYER, K.W.MORTON : Difference Methods for Initial Value Problems
Interscience Publishers, New York (1967)
- F.J.ROACHE : Computational Fluid Dynamics
Hermosa Publishers, Albuquerque (1976)
- D.H.RUDY, J.C.STRICKWERDA : A Nonreflecting Outflow Boundary for Subsonic Navier Stokes Calculations
J. Comp. Physics #36 (1980)55-70
- M.SCHECHTER : Principles of Functional Analysis
Academic Press, New York (1970)
- J.SJÖSTRAND : Special Topics in Partial Differential Equations
Unpublished Manuscript, Courant Inst., New York (1980)
- W.SMITH : A Nonreflecting Plane Boundary for Wave Propagation Problems
J.Comp. Physics #15 (1974)492-503
- J.C.STRICKWERDA : Initial Boundary Value Problems for the Method of Lines
J. Comp. Physics #34 (1980)94-107
- A.SUNDSTRÖM : Boundary Conditions for Limited Area Integration of the Viscous Forecast Equations
Beiträge zur Physik der Atmosphäre #50 (1977)218-224
- M.TAYLOR : Pseudo Differential Operators
Lecture Notes in Math. #416, Springer Verlag, Berlin (1974)
- M.TAYLOR : Reflection of Singularities of Solutions to Systems of Differential Equations
Comm. Pure Appl. Math. #28 (1975)457-478
- M.TAYLOR : Grazing Rays and Reflection of Singularities of Solutions to Wave Equations I+II
Comm. Pure Appl. Math.#29 (1976)1-38,463-481
- E.TRAUTENBERG : Nichtreflektierende Randbedingung inhomogener Differenzengleichungen
Siemens Notiz FL FKS 12, München (1980)

- E.TRAUTENBERG : Optimierte nichtreflektierende Randbedingung
inhomogener Differenzengleichungen
Siemens Notiz FL FKS 12, München (1980)
- E.TRAUTENBERG, K.GEBAUER, A.SACHS : Numerical Simulation of
Wave Propagation with Nonreflecting Boundary
Conditions
in: Wave Propagation in Viscoelastic Media, edited
by F.Mainardi, Pitman Co., London (1982)
- F.TREVES (1980a) : Introduction to Pseudodifferential and
Fourier Integral Operators I : PseudoDO
Plenum Press, New York (1980)
- F.TREVES (1980b) : Introduction to Pseudodifferential and
Fourier Integral Operators II : FIO
Plenum Press, New York (1980)
- J.C.WILSON : Derivation of Boundary Conditions for the Arti-
ficial Boundaries Associated with the Solution of
Certain Time Dependent Problems by Lax-Wendroff
Type Difference Schemes
Proc. Edinburgh Math. Soc. #25 (1982)1-19
- O.Z.ZIENKIEWICZ, D.KELLY, P.BETTES : The Sommerfeld Radiation
Condition on an Infinite Domain and its Modelling
in Numerical Processes
in: Proc. IRIA, Comp. Meth. in Appl. Sc. and Eng.,
ed. by R.Glowinski, J.L.Lions
LN in Math. #704, Springer-Verlag, Berlin (1979)169-207

LEBENS LAUF

Ludwig Wagatha	geboren am 28. März 1954 in München als Sohn von Ludwig und Therese Wagatha.
Schulbildung	1960-1964 Volksschule an der Blütenburgstraße in München 1964-1973 Rupprecht-Gymnasium München, mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig 1973 Abitur
Studium	1973-1978 Studium der Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität, München 1978 Diplomhauptprüfung im Fach Mathematik
Tätigkeit	August 1978 - März 1979 Mitarbeit am Sonderforschungsbereich 51 (Physiologische Chemie) 1979-1980 Aufenthalt am Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, mit einem Stipendium des DAAD 1980-1982 Stipendium der Studienstiftung des Deutschen Volkes

D. GRÄBNER

DISSERTATIONS U. OFFSETDRUCKEREI



Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon. 09545 / 8791